Università degli Studi di Trento
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Aggiunzione di radici n-esime

14 settembre 2005

Laureanda: Ester Dalvit
Relatore: prof. Andrea Caranti

Un polinomio si dice *puro* se ha la forma

$$X^n - a.$$

Consideriamo il polinomio

$$X^n - 1.$$

Le sue radici sono dette radici n-esime dell'unità.
Sia ε una di queste radici.
Allora

$$\varepsilon^n = 1.$$

ε viene detta radice *primitiva* n-esima dell'unità se ha periodo n.
(il periodo di ε è il più piccolo intero $s \geq 1$ tale che $\varepsilon^s = 1$)

Un polinomio si dice *puro* se ha la forma

$$X^n - a.$$

Consideriamo il polinomio

$$X^n - 1.$$

Le sue radici sono dette radici n-esime dell'unità.
Sia ε una di queste radici.
Allora

$$\varepsilon^n = 1.$$

ε viene detta radice *primitiva* n-esima dell'unità se ha periodo n.
(il periodo di ε è il più piccolo intero $s \geq 1$ tale che $\varepsilon^s = 1$)

Un polinomio si dice *puro* se ha la forma

$$X^n - a.$$

Consideriamo il polinomio

$$X^n - 1.$$

Le sue radici sono dette radici n-esime dell'unità.
Sia ε una di queste radici.
Allora

$$\varepsilon^n = 1.$$

ε viene detta radice *primitiva* n-esima dell'unità se ha periodo n.
(il periodo di ε è il più piccolo intero $s \geq 1$ tale che $\varepsilon^s = 1$)

Un polinomio si dice *puro* se ha la forma

$$X^n - a.$$

Consideriamo il polinomio

$$X^n - 1.$$

Le sue radici sono dette radici n-esime dell'unità.
Sia ε una di queste radici.
Allora

$$\varepsilon^n = 1.$$

ε viene detta radice *primitiva* n-esima dell'unità se ha periodo n.
(il periodo di ε è il più piccolo intero $s \geq 1$ tale che $\varepsilon^s = 1$)

Un polinomio si dice *puro* se ha la forma

$$X^n - a.$$

Consideriamo il polinomio

$$X^n - 1.$$

Le sue radici sono dette radici n-esime dell'unità.
Sia ε una di queste radici.
Allora

$$\varepsilon^n = 1.$$

ε viene detta radice *primitiva* n-esima dell'unità se ha periodo n.
(il periodo di ε è il più piccolo intero $s \geq 1$ tale che $\varepsilon^s = 1$)

Un polinomio si dice *puro* se ha la forma

$$X^n - a.$$

Consideriamo il polinomio

$$X^n - 1.$$

Le sue radici sono dette radici n-esime dell'unità.
Sia ε una di queste radici.
Allora

$$\varepsilon^n = 1.$$

ε viene detta radice *primitiva* n-esima dell'unità se ha periodo n.
(il periodo di ε è il più piccolo intero $s \geq 1$ tale che $\varepsilon^s = 1$)

Un polinomio si dice *puro* se ha la forma

$$X^n - a.$$

Consideriamo il polinomio

$$X^n - 1.$$

Le sue radici sono dette radici n-esime dell'unità.
Sia ε una di queste radici.
Allora

$$\varepsilon^n = 1.$$

ε viene detta radice *primitiva* n-esima dell'unità se ha periodo n.
(il periodo di ε è il più piccolo intero $s \geq 1$ tale che $\varepsilon^s = 1$)

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

$$(\alpha\varepsilon)^n$$

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

$$(\alpha\varepsilon)^n = \alpha^n \varepsilon^n$$

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

$$(\alpha\varepsilon)^n = \alpha^n \varepsilon^n = a \cdot 1 = a$$

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

$$(\alpha\varepsilon^r)^n$$

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio.

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

$$(\alpha\varepsilon^r)^n = \alpha^n (\varepsilon^n)^r$$

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

$$(\alpha\varepsilon^r)^n = \alpha^n (\varepsilon^n)^r = a \cdot 1^r = a$$

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

$$(\alpha\varepsilon^r)^n = \alpha^n (\varepsilon^n)^r = a \cdot 1^r = a$$

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Sia ε una radice n-esima dell'unità.
Sia α una radice del polinomio puro $X^n - a$, cioè $\alpha^n = a$.
Diremo che α è una radice n-esima di a. Allora

$$(\alpha\varepsilon^r)^n = \alpha^n (\varepsilon^n)^r = a \cdot 1^r = a$$

Dunque conoscendo una radice primitiva n-esima dell'unità ε e una radice α di $X^n - a$, si trovano tutte le radici di questo polinomio:

$$\{\alpha\varepsilon^r : 0 \leq r < n\}.$$

Se il polinomio $X^n - a$ è irriducibile sul campo K, nessuna delle sue radici appartiene a K.

Lo spazio vettoriale ottenuto dall'*aggiunzione della radice* α *al campo* K, ovvero lo spazio

$$K(\alpha) = \{x + \alpha y : x, y \in K\}$$

ha dimensione n su K, poiché il minimo intero positivo s tale che $\alpha^s \in K$ è n.

In questo caso si dice che l'estensione $K(\alpha)$ su K ha grado n.

Se il polinomio $X^n - a$ è irriducibile sul campo K, nessuna delle sue radici appartiene a K.
Lo spazio vettoriale ottenuto dall'*aggiunzione della radice α al campo K*, ovvero lo spazio

$$K(\alpha) = \{x + \alpha y : x, y \in K\}$$

ha dimensione n su K, poichè il minimo intero positivo s tale che $\alpha^s \in K$ è n.
In questo caso si dice che l'estensione $K(\alpha)$ su K ha grado n.

Se il polinomio $X^n - a$ è irriducibile sul campo K, nessuna delle sue radici appartiene a K.
Lo spazio vettoriale ottenuto dall'*aggiunzione della radice α al campo K*, ovvero lo spazio

$$K(\alpha) = \{x + \alpha y : x, y \in K\}$$

ha dimensione n su K, poichè il minimo intero positivo s tale che $\alpha^s \in K$ è n.
In questo caso si dice che l'estensione $K(\alpha)$ su K ha grado n.

Se il polinomio $X^n - a$ è irriducibile sul campo K, nessuna delle sue radici appartiene a K.
Lo spazio vettoriale ottenuto dall'*aggiunzione della radice α al campo K*, ovvero lo spazio

$$K(\alpha) = \{x + \alpha y : x, y \in K\}$$

ha dimensione n su K, poichè il minimo intero positivo s tale che $\alpha^s \in K$ è n.
In questo caso si dice che l'estensione $K(\alpha)$ su K ha grado n.

Se il polinomio $X^n - a$ è irriducibile sul campo K, nessuna delle sue radici appartiene a K.
Lo spazio vettoriale ottenuto dall'*aggiunzione della radice* α *al campo* K, ovvero lo spazio

$$K(\alpha) = \{x + \alpha y : x, y \in K\}$$

ha dimensione n su K, poichè il minimo intero positivo s tale che $\alpha^s \in K$ è n.
In questo caso si dice che l'estensione $K(\alpha)$ su K ha grado n.

Teorema

Sia K un campo, e $n \geq 2$ un intero. *Sia $a \in K$, $a \neq 0$.*
Il polinomio puro

$$X^n - a \in K[X]$$

è irriducibile sul campo K se e solo se:

- *per ogni primo p che divide n, si ha $a \notin K^p$ e*
- *se 4 divide n, allora $a \notin -4K^4$.*

Teorema

Sia K un campo, e $n \geq 2$ un intero. Sia $a \in K$, $a \neq 0$.

Il polinomio puro

$$X^n - a \in K[X]$$

è irriducibile sul campo K se e solo se:

- *per ogni primo p che divide n, si ha $a \notin K^p$ e*
- *se 4 divide n, allora $a \notin -4K^4$.*

Teorema

Sia K un campo, e $n \geq 2$ un intero. Sia $a \in K$, $a \neq 0$.
Il polinomio puro

$$X^n - a \in K[X]$$

è irriducibile sul campo K se e solo se:

- *per ogni primo p che divide n, si ha $a \notin K^p$ e*
- *se 4 divide n, allora $a \notin -4K^4$.*

Teorema

Sia K un campo, e $n \geq 2$ un intero. Sia $a \in K$, $a \neq 0$.
Il polinomio puro

$$X^n - a \in K[X]$$

è irriducibile sul campo K se e solo se:

- *per ogni primo p che divide n, si ha $a \notin K^p$ e*
- *se 4 divide n, allora $a \notin -4K^4$.*

Teorema

Sia K un campo, e $n \geq 2$ un intero. Sia $a \in K$, $a \neq 0$.
Il polinomio puro

$$X^n - a \in K[X]$$

è irriducibile sul campo K se e solo se:

- *per ogni primo p che divide n, si ha $a \notin K^p$ e*
- *se 4 divide n, allora $a \notin -4K^4$.*

ovvero per ogni $k \in K$, si ha che $a \neq k^p$.

Teorema

Sia K un campo, e $n \geq 2$ un intero. Sia $a \in K$, $a \neq 0$.
Il polinomio puro

$$X^n - a \in K[X]$$

è irriducibile sul campo K se e solo se:

- *per ogni primo p che divide n, si ha $a \notin K^p$ e*
- *se 4 divide n, allora $a \notin -4K^4$.*

Teorema

Sia K un campo, e $n \geq 2$ un intero. Sia $a \in K$, $a \neq 0$.
Il polinomio puro

$$X^n - a \in K[X]$$

è irriducibile sul campo K se e solo se:

- *per ogni primo p che divide n, si ha $a \notin K^p$ e*
- *se 4 divide n, allora $a \notin -4K^4$.*

ovvero per ogni $k \in K$, si ha che $a \neq -4k^4$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.

Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.

Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Esempio 1

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 7$$

a coefficienti razionali.

- I divisori primi di 6 sono
  $p = 2$: $7 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $7 \notin \mathbb{Q}^3$
- 4 non divide 6.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Entrambe le condizioni sono soddisfatte, dunque il polinomio $X^6 - 7$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Esempio 2

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 8$$

a coefficienti razionali.

- $p = 2$: $8 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $8 = 2^3 \in \mathbb{Q}^3$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

La prima condizione non è soddisfatta, dunque il polinomio è riducibile.

Esempio 2

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 8$$

a coefficienti razionali.

- $p = 2$: $8 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $8 = 2^3 \in \mathbb{Q}^3$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

La prima condizione non è soddisfatta, dunque il polinomio è riducibile.

Esempio 2

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 8$$

a coefficienti razionali.

- $p = 2$: $8 \notin \mathbb{Q}^2$
- $p = 3$: $8 = 2^3 \in \mathbb{Q}^3$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

La prima condizione non è soddisfatta, dunque il polinomio è riducibile.

Esempio 2

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 8$$

a coefficienti razionali.

- $p = 2$: $8 \notin \mathbb{Q}^2$
- $p = 3$: $8 = 2^3 \in \mathbb{Q}^3$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

La prima condizione non è soddisfatta, dunque il polinomio è riducibile.

Esempio 2

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 8$$

a coefficienti razionali.

- $p = 2$: $8 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $8 = 2^3 \in \mathbb{Q}^3$.

La prima condizione non è soddisfatta, dunque il polinomio è riducibile.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Esempio 2

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 8$$

a coefficienti razionali.

- $p = 2$: $8 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $8 = 2^3 \in \mathbb{Q}^3$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

La prima condizione non è soddisfatta, dunque il polinomio è riducibile.

Esempio 2

Consideriamo il polinomio

$$X^6 - 8$$

a coefficienti razionali.

- $p = 2$: $8 \notin \mathbb{Q}^2$
  $p = 3$: $8 = 2^3 \in \mathbb{Q}^3$.

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

La prima condizione non è soddisfatta, dunque il polinomio è riducibile.

Le condizioni sono necessarie

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

$$= \left(X^{2m} + 2bX^m + 2b^2\right)\left(X^{2m} - 2bX^m + 2b^2\right).$$

Le condizioni sono necessarie

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

$$= \left(X^{2m} + 2bX^m + 2b^2\right)\left(X^{2m} - 2bX^m + 2b^2\right).$$

Le condizioni sono necessarie

Se la prima condizione non è verificata, allora

$$n = mp$$

e

$$a = b^p,$$

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

$$= \left(X^{2m} + 2bX^m + 2b^2\right)\left(X^{2m} - 2bX^m + 2b^2\right).$$

Le condizioni sono necessarie

Se la prima condizione non è verificata, allora

$$n = mp$$

e

$$a = b^p,$$

dunque

$$X^n - a = X^{mp} - b^p$$

$$= \left(X^{2m} + 2bX^m + 2b^2\right)\left(X^{2m} - 2bX^m + 2b^2\right).$$

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Le condizioni sono necessarie

Se la prima condizione non è verificata, allora

$$n = mp$$

e

$$a = b^p,$$

dunque

$$X^n - a = X^{mp} - b^p$$

è divisibile per $X^m - b$.

$$= \left(X^{2m} + 2bX^m + 2b^2\right)\left(X^{2m} - 2bX^m + 2b^2\right).$$

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Le condizioni sono necessarie

Se la seconda condizione non è verificata, allora

$$n = 4m$$

e

$$a = -4b^4,$$

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

$$= \left(X^{2m} + 2bX^m + 2b^2\right)\left(X^{2m} - 2bX^m + 2b^2\right).$$

Le condizioni sono necessarie

Se la seconda condizione non è verificata, allora

$$n = 4m$$

e

$$a = -4b^4,$$

dunque

$$X^n - a = X^{4m} + 4b^4 =$$

$$= \left(X^{2m} + 2bX^m + 2b^2\right)\left(X^{2m} - 2bX^m + 2b^2\right).$$

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Le condizioni sono necessarie

Se la seconda condizione non è verificata, allora

$$n = 4m$$

e

$$a = -4b^4,$$

dunque

$$X^n - a = X^{4m} + 4b^4 =$$

$$= \left(X^{2m} + 2bX^m + 2b^2\right)\left(X^{2m} - 2bX^m + 2b^2\right).$$

Condizioni per l'irriducibilità

Per ogni primo p che divide n, deve essere $a \notin K^p$.
Se 4 divide n, deve essere $a \notin -4K^4$.

Le condizioni sono sufficienti (traccia)

- se il Teorema vale per potenze di primi $n = p^r$, allora vale in generale, per ogni intero n;
- il Teorema vale per potenze di primi $n = p^r$; induzione su r.

Le condizioni sono sufficienti (traccia)

- se il Teorema vale per potenze di primi $n = p^r$, allora vale in generale, per ogni intero n;
- il Teorema vale per potenze di primi $n = p^r$; induzione su r.

Le condizioni sono sufficienti (traccia)

- se il Teorema vale per potenze di primi $n = p^r$, allora vale in generale, per ogni intero n;
- il Teorema vale per potenze di primi $n = p^r$; induzione su r.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.
Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado } 2 \text{ su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.

Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.

Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado } 2 \text{ su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.
Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado } 2 \text{ su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.
Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado 2 su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.
Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado 2 su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.
Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado 2 su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.
Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado } 2 \text{ su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.
Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado } 2 \text{ su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso. Ad esempio

$$X^2 + 1$$

ha soluzioni complesse $\pm i$.
Sappiamo anche che ogni equazione a coefficienti reali ha soluzione in $\mathbb{C}$. Inoltre $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.
Cioè la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
Poichè $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} \text{ ha grado } 2 \text{ su } \mathbb{R}.$$

Questa situazione non è casuale, come si può vedere dal seguente teorema.

Teorema

Sia K un campo non algebricamente chiuso.
Sia $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica. Supponiamo che essa abbia grado finito su K. Allora

Nell'esempio, $K = \mathbb{R}$ e $\overline{K} = \mathbb{C}$.

Teorema

Sia K un campo non algebricamente chiuso.
Sia $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica. Supponiamo che essa abbia grado finito su K. Allora

- *$\overline{K}$ ha grado 2 su K,*
- *$\overline{K}$ si ottiene aggiungendo a K una radice quadrata di -1,*
- *K ha caratteristica 0.*

Nell'esempio, $K = \mathbb{R}$ e $\overline{K} = \mathbb{C}$.

Teorema

Sia K un campo non algebricamente chiuso.
Sia $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica. Supponiamo che essa abbia grado finito su K. *Allora*

- $\overline{K}$ ha grado 2 su K;
- $\overline{K}$ si ottiene aggiungendo a K una radice quadrata di -1;
- K ha caratteristica 0.

Nell'esempio, $K = \mathbb{R}$ e $\overline{K} = \mathbb{C}$.

Teorema

Sia K un campo non algebricamente chiuso.
Sia $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica. Supponiamo che essa abbia grado finito su K. Allora

- *$\overline{K}$ ha grado 2 su K;*
- *$\overline{K}$ si ottiene aggiungendo a K una radice quadrata di -1;*
- *K ha caratteristica 0.*

Nell'esempio, $K = \mathbb{R}$ e $\overline{K} = \mathbb{C}$.

Teorema

Sia K un campo non algebricamente chiuso.
Sia $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica. Supponiamo che essa abbia grado finito su K. Allora

- *$\overline{K}$ ha grado 2 su K;*
- *$\overline{K}$ si ottiene aggiungendo a K una radice quadrata di -1;*
- *K ha caratteristica 0.*

Nell'esempio, $K = \mathbb{R}$ e $\overline{K} = \mathbb{C}$.

Teorema

Sia K un campo non algebricamente chiuso.
Sia $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica. Supponiamo che essa abbia grado finito su K. Allora

- *$\overline{K}$ ha grado 2 su K;*
- *$\overline{K}$ si ottiene aggiungendo a K una radice quadrata di -1;*
- *K ha caratteristica 0.*

Nell'esempio, $K = \mathbb{R}$ e $\overline{K} = \mathbb{C}$.

Teorema

Sia K un campo non algebricamente chiuso.
Sia $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica. Supponiamo che essa abbia grado finito su K. Allora

- *$\overline{K}$ ha grado 2 su K;*
- *$\overline{K}$ si ottiene aggiungendo a K una radice quadrata di -1;*
- *K ha caratteristica 0.*

Nell'esempio, $K = \mathbb{R}$ e $\overline{K} = \mathbb{C}$.

Teorema

Sia K un campo non algebricamente chiuso.
Sia $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica. Supponiamo che essa abbia grado finito su K. Allora

- $\overline{K}$ *ha grado 2 su* K;
- $\overline{K}$ *si ottiene aggiungendo a* K *una radice quadrata di* -1;
- K *ha caratteristica 0.*

Nell'esempio, $K = \mathbb{R}$ e $\overline{K} = \mathbb{C}$.

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

Ma questo porta ad una contraddizione!
Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?
Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

Ma questo porta ad una contraddizione!

Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?

Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

Ma questo porta ad una contraddizione!
Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?
Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

Ma questo porta ad una contraddizione!
Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?
Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

$$\sqrt[n]{p} = \frac{q}{r}$$

Ma questo porta ad una contraddizione!
Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?
Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

$$p = \left(\frac{q}{r}\right)^n$$

Ma questo porta ad una contraddizione!

Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?

Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

$$r^n p = q^n$$

Ma questo porta ad una contraddizione!

Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?

Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

$$r^n p = q^n$$

Ma questo porta ad una contraddizione!

Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?

Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

$$r^n p = q^n$$

Ma questo porta ad una contraddizione!
Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?

Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

$$r^n p = q^n$$

Ma questo porta ad una contraddizione!
Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?
Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Prendiamo un intero $n > 1$ e un primo p. Sappiamo che

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$$

non è un numero razionale. Per assurdo, se lo fosse, esisterebbero due interi q, r coprimi tali che

$$r^n p = q^n$$

Ma questo porta ad una contraddizione!
Cosa possiamo dire di combinazioni lineari di radici n-esime di primi?
Ad esempio:

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Il risultato può essere un numero razionale?

Teorema

Sia $n > 1$ un intero.
Siano $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primi distinti.
Allora l'estensione

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \ldots, \sqrt[n]{p_k})$$

ha grado n^k su $\mathbb{Q}$.

Dunque una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \ldots, \sqrt[n]{p_k})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[n]{p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}} : 0 \leq m_i < n \text{ per } i = 1, \ldots, k \right\}$$

Teorema

Sia $n > 1$ un intero.
Siano $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primi distinti.
Allora l'estensione

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \ldots, \sqrt[n]{p_k})$$

ha grado n^k su $\mathbb{Q}$.

Dunque una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \ldots, \sqrt[n]{p_k})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[n]{p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}} : 0 \leq m_i < n \text{ per } i = 1, \ldots, k \right\}$$

Teorema

Sia $n > 1$ un intero.
Siano $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primi distinti.
Allora l'estensione

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \ldots, \sqrt[n]{p_k})$$

ha grado n^k su $\mathbb{Q}$.

Dunque una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \ldots, \sqrt[n]{p_k})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[n]{p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}} : 0 \leq m_i < n \text{ per } i = 1, \ldots, k \right\}$$

Teorema

Sia $n > 1$ un intero.
Siano $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primi distinti.
Allora l'estensione

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \ldots, \sqrt[n]{p_k})$$

ha grado n^k su $\mathbb{Q}$.

Dunque una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \ldots, \sqrt[n]{p_k})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[n]{p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}} : 0 \leq m_i < n \text{ per } i = 1, \ldots, k \right\}$$

Teorema

Sia $n > 1$ un intero.
Siano $p_1, p_2, \dots, p_k$ primi distinti.
Allora l'estensione

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \dots, \sqrt[n]{p_k})$$

ha grado n^k su $\mathbb{Q}$.

Dunque una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p_1}, \dots, \sqrt[n]{p_k})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[n]{p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}} : 0 \leq m_i < n \text{ per } i = 1, \dots, k \right\}$$

Consideriamo la nostra combinazione lineare

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Applichiamo il Teorema appena enunciato, ponendo $n = 60$.
Sappiamo che una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[60]{2}, \sqrt[60]{3})$ su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[60]{2^a 3^b} : 0 \leq a, b < 60 \right\}.$$

I termini nell'espressione considerata appartengono a questa base:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[60]{2^{20}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[60]{3^{15}}$$

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[60]{2^{24} 3^{12}}$$

Dunque sono linearmente indipendenti, quindi il risultato di espressioni di questo tipo non sarà mai un numero razionale.

Consideriamo la nostra combinazione lineare

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Applichiamo il Teorema appena enunciato, ponendo $n = 60$.

Sappiamo che una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[60]{2}, \sqrt[60]{3})$ su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[60]{2^a 3^b} : 0 \leq a, b < 60 \right\}.$$

I termini nell'espressione considerata appartengono a questa base:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[60]{2^{20}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[60]{3^{15}}$$

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[60]{2^{24} 3^{12}}$$

Dunque sono linearmente indipendenti, quindi il risultato di espressioni di questo tipo non sarà mai un numero razionale.

Consideriamo la nostra combinazione lineare

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Applichiamo il Teorema appena enunciato, ponendo $n = 60$.
Sappiamo che una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[60]{2}, \sqrt[60]{3})$ su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[60]{2^a 3^b} : 0 \leq a, b < 60 \right\}.$$

I termini nell'espressione considerata appartengono a questa base:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[60]{2^{20}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[60]{3^{15}}$$

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[60]{2^{24} 3^{12}}$$

Dunque sono linearmente indipendenti, quindi il risultato di espressioni di questo tipo non sarà mai un numero razionale.

Consideriamo la nostra combinazione lineare

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Applichiamo il Teorema appena enunciato, ponendo $n = 60$. Sappiamo che una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[60]{2}, \sqrt[60]{3})$ su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[60]{2^a 3^b} : 0 \leq a, b < 60 \right\}.$$

I termini nell'espressione considerata appartengono a questa base:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[60]{2^{20}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[60]{3^{15}}$$

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[60]{2^{24} 3^{12}}$$

Dunque sono linearmente indipendenti, quindi il risultato di espressioni di questo tipo non sarà mai un numero razionale.

Consideriamo la nostra combinazione lineare

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Applichiamo il Teorema appena enunciato, ponendo $n = 60$.
Sappiamo che una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[60]{2}, \sqrt[60]{3})$ su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[60]{2^a 3^b} : 0 \leq a, b < 60 \right\}.$$

I termini nell'espressione considerata appartengono a questa base:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[60]{2^{20}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[60]{3^{15}}$$

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[60]{2^{24} 3^{12}}$$

Dunque sono linearmente indipendenti, quindi il risultato di espressioni di questo tipo non sarà mai un numero razionale.

Consideriamo la nostra combinazione lineare

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Applichiamo il Teorema appena enunciato, ponendo $n = 60$.
Sappiamo che una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[60]{2}, \sqrt[60]{3})$ su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[60]{2^a 3^b} : 0 \leq a, b < 60 \right\}.$$

I termini nell'espressione considerata appartengono a questa base:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[60]{2^{20}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[60]{3^{15}}$$

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[60]{2^{24} 3^{12}}$$

Dunque sono linearmente indipendenti, quindi il risultato di espressioni di questo tipo non sarà mai un numero razionale.

Consideriamo la nostra combinazione lineare

$$\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 6\sqrt[5]{12}$$

Applichiamo il Teorema appena enunciato, ponendo $n = 60$.
Sappiamo che una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[60]{2}, \sqrt[60]{3})$ su $\mathbb{Q}$ è

$$\left\{ \sqrt[60]{2^a 3^b} : 0 \leq a, b < 60 \right\}.$$

I termini nell'espressione considerata appartengono a questa base:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[60]{2^{20}}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[60]{3^{15}}$$

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[60]{2^{24} 3^{12}}$$

Dunque sono linearmente indipendenti, quindi il risultato di espressioni di questo tipo non sarà mai un numero razionale.