Integrabilität von unendlichen gewichteten Summen von i.i.d. Zufallsvariablen

Ester Dalvit

23 März 2006

1 Einleitung

Seien Y_n, $n \geq 0$ unabhängige gleichverteilte reellwertige Zufallsvariablen. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmass und E der Erwartungswertoperator. Sei $a \in \mathbb{R}$, $0 < |\, a\,| < 1$. Sei

$$X := \sum_{n \geq 0} a^n \, Y_n. \tag{1}$$

Diese Folge ist genau dann wohldefiniert als P-fast sicher absolut konvergent, wenn $E[\log^+ |\, Y_0\,|] < \infty$ (vgl. Anhang und [2], S. 625). Wir setzen das voraus.

Satz 1. *Sei* $\beta \geq 1$. *Seien*

$$\begin{aligned} f(t) &:= \beta(\log t)^{\beta-1} \\ g(t) &:= (\log t)^{\beta} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$E[f(|\, X\,|)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad E[g(|\, Y_0\,|)] < \infty.$$

Sei ν die Verteilungsfunktion von Y_n, und μ die von X.

Sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable, mit Verteilungsfunktion ν. Dann

$$aX + Y = Y + \sum_{n \geq 0} a^{n+1} Y_n$$

hat dieselbe Verteilung wie X.

Da Y unabhängig von X, gilt für die Charakteristischen Funktionen:

$$\hat{\mu}(t) = \hat{\mu}(at)\hat{\nu}(t). \tag{2}$$

Das ist das einfachste Beispiel, in dem μ das stationäre Mass von einem linearen Prozess ist, und zwar von dem $AR(1)$-Prozess definiert durch:

$$X_{n+1} = aX_n + Y_n \qquad (n \geq 0).$$

Wir wollen den Schwanz der Distribution von X beobachten und er im Bezug auf den Schwanz der Distribution von Y_0 steht. Dafür beobachten wir wie die Integrierbarkeit von $f(|X|)$ sich auf die von $g(|Y_0|)$ bezieht (im allgemeinen Fall sind f und g positive steigende Funktionen).

Man erwartet, dass der Schwanz von X mindestens so schwer ist als der von Y_0. Zum Beispiel, wenn $a = 1$, dann

$$X = a^n Y_n \;\geq\; Y_0 \quad P\text{-fast sicher.}$$

Wir wollen untersuchen, ob der Schwanz von X echt schwerer als der von Y_0 sein kann, d.h. ob es eine positive steigende Abbildung existiert derart, dass der Erwartungswert von $g(|Y_0|)$ endlich ist, aber der von $g(|X|)$ unendlich.

Für endliche Summen kann das nicht passieren, wenn g eine logarithmisch (oder exponentiell oder polynomiell) steigende Funktion ist. Eine endliche Summe von unabhängige Zufallsvariablen genau dann hat endlichen Erwartungswert unter g, wenn g von jedem Summand endlichen Erwartungswert hat.

Für unendliche Summen, im Gegenteil, gilt das für g exponentiell oder polynomiell steigend, aber nicht für g logarithmisch steigend: die Integrabilität von $|Y_0|$ unter g ist nicht äquivalent zu der von $|X|$ unter g.

Wir betrachten aber nur den Spezialfall für f und g wie oben definiert.

Eine andere Art, die Schwänzen zu beobachten und sie im Bezug zu setzen, ist der Vergleich des Verhaltens von $P[|Y_0| > t]$ und $P[|X| > t]$ für $t \to \infty$. Für eine nichtnegative Zufallsvariable Z und eine positive steigende Funktion h, sind die zwei Methode korreliert, durch die Formel:

$$E[h(Z)] = \int_0^\infty P[Z > h^{-1}(t)]\, dt.$$

2 Hilfslemmas

Lemma 2. *Seien Z, W Zufallsvariablen; sei $T > 0$ und h eine monoton steigende Funktion mit*

$$t \mapsto \frac{h(t)}{t} \quad \textit{fallend für } t \geq T. \tag{3}$$

- *Wenn $E[h(|\,Z\,|)] < \infty$ und $E[h(|\,W\,|)] < \infty$, dann $E[h(|\,Z+W\,|)] < \infty$.*
- *Sei $0 < c < \infty$. Dann: $E[h(|\,Z\,|)] < \infty \Longleftrightarrow E[h(c\,|\,Z\,|)] < \infty$.*
- *Seien Z, W unabhängig. Für $h = f$ oder $h = g$, wenn $E[h(|\,Z+W\,|)] < \infty$, dann $E[h(|\,W\,|)] < \infty$ und $E[h(|\,Z\,|)] < \infty$.*

Beweis. Wegen (3) gilt

$$\frac{h(x+y)}{x+y} \leq \frac{h(x)}{x}$$

für $x, y \geq T$. Damit [multipliziere mit x und betrachte dieselbe Ungleichung für y]

$$h(x+y) \leq h(x) + h(y)$$

für $x, y \geq T$. Da h monoton steigend, folgt:

$$E[h(|\,Z+W\,|)] \leq E[h(|\,Z\,| \vee T)] + E[h(|\,W\,| \vee T)].$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen, da

$$\begin{aligned} E[h(|\,Z\,| \vee T)] &= E[h(|\,Z\,|)\,1_{|\,Z\,|\geq T}] + E[h(T)\,1_{|\,Z\,|<T}] \\ &\leq E[h(|\,Z\,|)]g(T) \ < \ \infty. \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt aus der Monotonie von h und aus iterierter Anwendung von der ersten Behauptung.

Für die letzte Behauptung, beachte: f und g erfüllen die Voraussetzungen der ersten zwei Behauptungen. Es folgt aus der Monotonie von h, dass, für alle $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned}\infty &> E\left[h(|\, Z + W\,|)\right] \\ &\geq E\left[h(|\,|\, Z\,| - |\, W\,|\,|)\, 1_{|\,W\,| \leq \gamma \leq |\,Z\,|}\right] \\ &\geq E\left[h(|\,|\, Z\,| - \gamma\,|)\, 1_{\gamma \leq |\,Z\,|}\right] \underbrace{P\left[|\, W\,| \leq \gamma\right]}_{>0 \text{ für } \gamma \text{ gross}},\end{aligned}$$

da Z, W unabhängig. Dann ist $E[h(|\,|\,Z\,| - \gamma\,|)] < \infty$ für ein grosses γ.

Für $h = g$, wende den ersten Teil an auf $\tilde{Z} := |\,Z\,| - \gamma$ und $\tilde{W} := \gamma$. Dann gilt $E[g(|\,Z\,|)] < \infty$. Nach Symmetrie gilt auch $E[g(|\,W\,|)] < \infty$.

Für $h = f$: es existiert ein $c > 0$ mit $f(x - y) \geq c f(x)$ für x gross. Dann $E[f(|\,Z\,|)] < \infty$ und analog $E[f(|\,W\,|)] < \infty$. $\square$

Lemma 3. *Sei σ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathbb{R}$. Sei $T > 0$ und $0 < \alpha < 1$ mit $f \in \mathcal{C}([0,\infty[, [0,\infty[)$ steigend auf $[0,\infty[$ und stetig differenzierbar auf $]T,\infty[$ mit*

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t^{\alpha}} \text{ fallend auf }]T,\infty[. \tag{4}$$

Sei $0 < \theta < 1$. Genau dann gilt

$$\int f(|\,x\,|)\, d\sigma(x) < \infty, \tag{5}$$

wenn

$$\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \int_0^1 |\, 1 - \hat{\sigma}(\theta^y t)\,|\, dy\, dt < \infty. \tag{6}$$

Beweis. “(5) $\Longrightarrow$ (6)”: Beachte,

$$\begin{aligned}
|\,1-\hat\sigma(t)\,| &= \left|1-\int e^{itx}d\sigma(x)\right| \\
&= \left|\int 1-e^{itx}d\sigma(x)\right| \\
&\le \int |\,1-e^{itx}\,|\,d\sigma(x) \\
&= \int |\,1-\cos(tx)-i\sin(tx)\,|\,d\sigma(x) \\
&= \int \left|\sqrt{(1-\cos(tx))^2+\sin^2(tx)}\right| d\sigma(x) \\
&= \int |\,\sqrt{2-2\cos tx}\,|\,d\sigma(x) \\
&= 2\int \left|\sqrt{\frac{1-\cos(tx)}{2}}\right| d\sigma(x) \\
&= 2\int \left|\sin\frac{t\,|\,x\,|}{2}\right| d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Da $|\sin y\,|\le y\wedge 1$ für $y\ge 0$, gilt

$$\begin{aligned}
r(x,y) :=&\ 2\int_0^{\frac{1}{T}}\frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2}\left|\sin\frac{\theta^y t\,|\,x\,|}{2}\right| dt \\
\le&\ \theta^y\,|\,x\,|\int_0^{\frac{1}{T\vee|\,x\,|}}\frac{f'(\frac{1}{t})}{t}\,dt+2\int_{\frac{1}{T\vee|\,x\,|}}^{\frac{1}{T}}\frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Für alle $\gamma\in]0,\frac{1}{T}[$ gilt

$$\int_0^{\gamma}\frac{f'(\frac{1}{t})}{t}\,dt\ \le\ \frac{\alpha}{1-\alpha}\gamma f\left(\frac{1}{\gamma}\right). \tag{7}$$

Um dass zu beweisen, beachte dass das Integral in (7) endlich ist, denn wegen (4) gilt $tf'(t)\le\alpha f(t)$ für alle $t>T$, und dann gibt es eine Konstante c derart, dass für t klein (für alle $t<\frac{1}{T}$) gilt:

$$\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\le\alpha f\left(\frac{1}{t}\right)\le f\left(\frac{1}{t}\right)\le\frac{c}{t^{\alpha}},$$

und das ist integrierbar.
Die letzte Ungleichung folgt aus $\frac{f(t)}{t^\alpha}$ steigend: für $h > 0$ gilt

$$\frac{f(s+h)}{(s+h)^\alpha} \leq \frac{f(s)}{s^\alpha} \quad \Rightarrow \quad f(s+h) \leq \frac{f(s)}{s^\alpha}(s+h)^\alpha \leq c(s+h)^\alpha$$

$$\int_0^\gamma \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\,dt \ \leq \ \int_0^\gamma ct^{-\alpha}dt \ = \ \frac{c}{1-\alpha}\gamma^{1-\alpha}.$$

Dann für $\gamma \searrow 0$, verschwindet die linke Seite in (7). Dann ist es hinreichend zu beweisen, dass die Ableitung bezüglich γ von der linken Seite kleiner als die Ableitung von der rechten Seite ist (so wächst die linke Seite langsamer, und da für $\gamma \searrow 0$ die Ungleichung gilt, so ist sie bewiesen). D.h., wir müssen prüfen, ob

$$\frac{f'\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(f\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \frac{f'\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma}\right),$$

und das ist äquivalent zu

$$\frac{f'\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma} \leq \alpha f\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

Das gilt, wegen $tf'(t) \leq \alpha f(t)$ für alle $t > T$, und $\frac{1}{\gamma} > T$.

Dann ist das erste Glied in (7)

$$\begin{aligned}\theta^y \,|\,x\,| \int_0^{\frac{1}{T\vee|\,x\,|}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t}dt &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta^y \frac{|\,x\,|}{T\vee|\,x\,|} f(T\vee|\,x\,|) \\ &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta^y f(T\vee|\,x\,|).\end{aligned}$$

Das zweite Glied in (7) ist

$$\begin{aligned}2\int_{\frac{1}{T\vee|\,x\,|}}^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2}dt &= 2\left[-f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{\frac{1}{T\vee|\,x\,|}}^{\frac{1}{T}} \\ &= 2\,f(T\vee|\,x\,|) - 2\,f(T) \\ &\leq 2\,f(T\vee|\,x\,|),\end{aligned}$$

da f steigend.

Dann ist die linke Seite von (6)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \int_0^1 |\, 1-\hat{\sigma}(\theta^y t)\, |\; dy\, dt & \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \int_0^1 2 \int \left| \sin \frac{\theta^y t\, |\, x\, |}{2} \right| d\sigma(x)\, dy\, dt \\
&\leq \int_0^1 \int r(x,y)\, d\sigma(x)\, dy \\
&\leq \int_0^1 \int \left(2 + \frac{\theta^y \alpha}{1-\alpha}\right) f(T \vee |\, x\, |)\, d\sigma(x)\, dy \\
&= \underbrace{\left(\int_0^1 2 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta^y\, dy\right)}_{\text{endlich, da } 0<\theta<1} \left(\int f(T \vee |\, x\, |)\, d\sigma(x)\right) < \infty,
\end{aligned}
$$

und das ist endlich nach Voraussetzung (5).

"(6) $\Longrightarrow$ (5)": Beachte,

$$|\, 1-\hat{\sigma}(t)\, | \geq |\, 1 - Re\hat{\sigma}(t)\, | = \int 1 - \cos(t\, |\, x\, |)\, d\sigma(x).$$

Setze

$$\mathrm{Ci}(s) := \gamma + \log s + \int_0^s \frac{\cos(t)-1}{t}\, dt$$

die Integral-Cosinusfunktion, wobei γ die Euler-Mascheroni Konstante ist, und

$$\phi(s) := \int_0^1 1 - \cos(\theta^y s)\, dy.$$

Setze $t = \theta^y s$ und erhalte

$$\phi(s) = 1 + \frac{\mathrm{Ci}(s) - \mathrm{Ci}(\theta s)}{\log \theta}.$$

Dann gilt nach (6):

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \int_0^1 |\, 1 - \hat{\sigma}(\theta^y t)\,|\; dy\, dt \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \int_0^1 \int 1 - \cos(\theta^y t \,|\, x \,|)\, d\sigma(x)\, dy\, dt \\
&= \int \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \phi(t \,|\, x \,|)\, dt\, d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Mit $t \,|\, x \,| = s$ erhalte:

$$\infty > \int \frac{1}{|\, x \,|} \int_0^{\frac{|\, x \,|}{T}} f'\left(\frac{|\, x \,|}{s}\right) \left(\frac{|\, x \,|}{s}\right)^2 \phi(s)\, ds\, d\sigma(x). \tag{8}$$

Da $\mathrm{Ci}(s) \to 0$ wenn $s \to \infty$, existiert eine Konstante $k > 0$ mit $\phi(s) \geq \frac{1}{2}$ für $s > k$. Dann ist (8) grösser als

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{|\, x \,| > kT} \int_k^{\frac{|\, x \,|}{T}} f'\left(\frac{|\, x \,|}{s}\right) \frac{|\, x \,|}{s^2}\, ds\, d\sigma(x) \\
&\quad = \frac{1}{2} \int_{|\, x \,| > kT} \left[-f\left(\frac{|\, x \,|}{s}\right) \right]_{s=k}^{s=\frac{|\, x \,|}{T}} d\sigma(x) \\
&\quad = \frac{1}{2} \int_{|\, x \,| > kT} f\left(\frac{|\, x \,|}{k}\right) - f(T)\, d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Nach zweitem Punkt von Lemma (2) mit $c = 1/k$, gilt

$$\int_{|\, x \,| > T} f(|\, x \,|)\, d\sigma(x) < \infty.$$

Da f steigend, gilt (5). $\square$

Lemma 4. *Sei σ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathbb{R}$. Seien T, α und f wie in Lemma (3), mit $t \mapsto t^2 f'(t)$ steigend für $t > T$. Genau dann gilt*

$$\int f(|\, x \,|)\, d\sigma(x) < \infty, \tag{9}$$

wenn

$$\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \,|\, 1-\hat{\sigma}(t) \,|\; dt < \infty. \tag{10}$$

Beweis. "(9) $\Longrightarrow$ (10)": Setze $\theta = 1$ in "(5) $\Longrightarrow$ (6)" in dem Beweis von Lemma (3).

"(10) $\Longrightarrow$ (9)": Es gilt

$$|\, 1-\hat{\sigma}(t) \,| \geq |\, 1 - Re\hat{\sigma}(t) \,| = \int 1-\cos\left(t \,|\, x \,|\right) d\sigma x.$$

Dann

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \,|\, 1-\hat{\sigma}(t) \,|\; dt \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \int \underbrace{1-\cos\left(t \,|\, x \,|\right)}_{\phi(t|\,x\,|)} d\sigma(x)\, dt \\
&= \int \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \phi(t \,|\, x \,|)\, dt\, d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Setze $t \,|\, x \,| = s$ und erhalte:

$$\infty > \int_{|\,x\,|>T} \frac{1}{|\,x\,|} \int_1^{\frac{|\,x\,|}{T}} \underbrace{f'\left(\frac{|\,x\,|}{s}\right)\left(\frac{|\,x\,|}{s}\right)^2}_{h_x(s)} \phi(s)\, ds\, d\sigma(x). \tag{11}$$

Die Funktion h_x ist fallend für $s < \frac{|\,x\,|}{T}$, da $t \mapsto t^2 f'(t)$ steigend für $t > T$ nach Voraussetzung.

Für jede nichtnegative fallende Funktion h und jedes $y \geq 1$ existiert eine Konstante c derart, dass:

$$\int_1^y h(s)(1-\cos s)\, ds \geq c \int_1^y h(s)\, ds.$$

Dann ist (11) mindestens

$$\int_{|x|>T} \frac{1}{|x|} c \int_1^{\frac{|x|}{T}} h_x(s)\, ds\, d\sigma(x)$$

$$= \int_{|x|>T} c \int_1^{\frac{|x|}{T}} \frac{f'\left(\frac{|x|}{s}\right)}{\frac{s^2}{|x|}}\, ds\, d\sigma(x)$$

$$= \int_{|x|>T} c \left[-f\left(\frac{|x|}{s}\right)\right]_1^{\frac{x}{T}} d\sigma(x)$$

$$= c \int_{|x|>T} f(|x|) - f(T)\, d\sigma(x),$$

und damit gilt (9). □

Lemma 5. *Seien $\tau > 0$ und $h \in \mathcal{C}^1(]0,\tau],[0,\infty[)$ mit $h'(t) \leq 0$ für alle $t \in]0,\tau[$. Sei ν symmetrisch um 0. Genau dann gilt*

$$\int_0^\tau \frac{h(t)}{t} |1 - \hat{\nu}(t)|\, dt < \infty, \tag{12}$$

wenn

$$\int_0^\tau -h'(t) \int_0^1 |1 - \hat{\mu}(|a|^y t)|\, dy\, dt < \infty. \tag{13}$$

Beweis. Die beide Integrande sind kritisch nur in $t = 0$. Damit ist die Endlichkeit den Integralen in (12) und (13) äquivalent zu der von denselben Integralen mit T statt τ in der oberen Integrationsgrenze, für $0 < T < \tau$.

Wenn es eine Umgebung von 0 existiert, in dem h konstant ist, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $h'(t) = 0$ für alle $t \in [0,\varepsilon]$. Dann ist das Integal in (13) gleich:

$$\int_0^\varepsilon \underbrace{-h'(t)}_{=0} \int_0^1 |1 - \hat{\mu}(|a|^y t)|\, dy\, dt + \int_\varepsilon^\tau -h'(t) \int_0^1 \underbrace{|1 - \hat{\mu}(|a|^y t)|}_{\leq 1 + |\hat{\mu}(|a|^y t)| \in [1,2]}\, dy\, dt$$

$$\leq 0 + 2 \int_\varepsilon^\tau -h'(t)\, dt < \infty.$$

Aus Lemma (4) folgt die Endlichkeit der Ausdruck (12). Es gilt nämlich, mit $f = \log^+$ und $\sigma = \nu$:

$$E[\log^+ |\, Y_0 \,|] = \int \log^+ |\, x \,| \; d\nu(x) < \infty \qquad \text{(d.h. (9))}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{1}{t} \,|\, 1 - \hat{\nu}(t) \,|\; dt < \infty.$$

Dann gilt (12), denn h fallend.

Setze nun voraus, dass es keine Umgebung von 0 existiert, in dem h konstant ist. Da die Verteilungsfunktion ν von die Y_n $(n \geq 0)$ symmetrisch um 0 ist, so ist auch μ symmetrisch (folgt direkt aus der Definition (1) von X). Dann sind die Charakteristischen Funktionen $\hat{\nu}$ bzw. $\hat{\mu}$ von Y_n bzw. X reellwertig. Da Charakteristische Funktionen, sind sie auch stetig und gerade, und es gilt $0 \leq \hat{\nu}, \hat{\mu} \leq 1$ und $\hat{\nu}(0) = 1 = \hat{\mu}(0)$.

Dann existiert $T \in]0, \tau]$ mit $\hat{\nu}(t) > 0$ und $\hat{\mu}(t) > 0$ für alle $t \in [-T, T]$.

Da $\hat{\mu}(x) \to 1$ für $x \to 0$, kann man die teleskopische Summe schreiben:

$$1 - \underbrace{\hat{\mu}(|\, a \,|^y \, t)}_{\to 1 \text{ für } y \to \infty} = \sum_{k \geq 0} \hat{\mu}(|\, a \,|^{k+y+1} \, t) - \hat{\mu}(|\, a \,|^{k+y} \, t). \tag{14}$$

Für $|\, t \,| < T$ gilt nach (2)

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(|\, a \,|^{k+y} \, t) &= \underbrace{\hat{\mu}(a \,|\, a \,|^{k+y} \, t)}_{\geq 0} \, \underbrace{\hat{\nu}(|\, a \,|^{k+y} \, t)}_{\leq 1} \\ &\leq \hat{\mu}(a \,|\, a \,|^{k+y} \, t) \\ &= \hat{\mu}(|\, a \,|^{k+y+1} \, t), \end{aligned}$$

wobei wird die Symmetrie von $\hat{\mu}$ um 0 benutzt. Dann sind die Summanten in (14) nicht negativ.

Für $|\, t \,| < T$ gilt dann nach Fubini:

$$\begin{aligned} \int_0^1 1 - \hat{\mu}(|\, a \,|^y \, t) \, dy &= \int_0^1 \sum_{k \geq 0} \hat{\mu}(|\, a \,|^{k+y+1} \, t) - \hat{\mu}(|\, a \,|^{k+y} \, t) \, dy \\ &= \sum_{k \geq 0} \int_k^{k+1} \hat{\mu}(|\, a \,|^{y+1} \, t) - \hat{\mu}(|\, a \,|^y \, t) \, dy \\ &= \int_0^\infty \hat{\mu}(|\, a \,|^{y+1} \, t) - \hat{\mu}(|\, a \,|^y \, t) \, dy. \end{aligned}$$

Setze nun $s = |\,a\,|^y\, t$. [Dann $dy = \frac{ds}{s \log|\,a\,|}$]. Und das Integral wird

$$\begin{aligned}\int_0^1 1 - \hat{\mu}(|\,a\,|^y\, t)\, dy &= \int_t^0 \frac{\hat{\mu}(|\,a\,|\, s) - \hat{\mu}(s)}{s \log|\,a\,|}\, ds \\ &= -\frac{1}{\log|\,a\,|} \int_0^t \frac{\hat{\mu}(|\,a\,|\, s) - \hat{\mu}(s)}{s}\, ds.\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von $\hat{\mu}$ ist $\hat{\mu}(|\,a\,|\, s) = \hat{\mu}(as)$. Nach (2) gilt dann:

$$\int_0^1 1 - \hat{\mu}(|\,a\,|^y\, t)\, dy = -\frac{1}{\log|\,a\,|} \int_0^t \frac{\hat{\mu}(as)(1 - \hat{\nu}(s))}{s}\, ds.$$

Dann ist (13) äquivalent zu

$$\int_0^T -h'(t) \int_0^t \frac{\hat{\mu}(as)(1 - \hat{\nu}(s))}{s}\, ds\, dt < \infty. \tag{15}$$

Der Ausdruck in (15) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}&\int_0^T \frac{\hat{\mu}(as)(1 - \hat{\nu}(s))}{s} \underbrace{\int_s^T -h'(t)\, dt}_{=-h(T)+h(s)}\, ds \\ &= \int_0^T \frac{h(s)}{s} \underbrace{\left(1 - \frac{h(T)}{h(s)}\right) \hat{\mu}(as)}_{\phi(s)}(1 - \hat{\nu}(s))\, ds \;<\; \infty.\end{aligned}$$

Da h fallend in $]0, T]$ (da nach Voraussetzung $h'(t) \leq 0$ für alle $t \in]0, \tau[$ und $T \leq \tau$), folgt dass $\phi(s)$ gegen eine positive Konstante geht, wenn $s \searrow 0$.

Dann können wir $\phi(s)$ weglassen, ohne die Konvergenz des Integrals zu ändern. Damit ist ((13) äquivalent zu) (15) äquivalent zu

$$\int_0^T \frac{h(s)}{s}(1 - \hat{\nu}(s))\, ds < \infty,$$

und dies ist äquivalent zu (12). $\square$

3 Beweis des Satzes

Beweis. f, g sind stetig, steigend und stetig differenzierbar auf $[0,\infty[$, und es gilt $f(t) = tg'(t)$.

Für $0 < \alpha < 1$ ist die Abbildung

$$\varphi : t \mapsto \frac{f(t)}{t^\alpha} = \frac{\beta(\log t)^{\beta-1}}{t^\alpha}$$

fallend auf $]T,\infty[$, wobei $T = e^{\frac{\beta-1}{\alpha}}$ da

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{f'(t)t^\alpha - f(t)\alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} \\
&= \frac{\beta(\beta-1)(\log t)^{\beta-2}\frac{1}{t}t^\alpha - \beta(\log t)^{\beta-1}\alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} \\
&= \frac{\overbrace{\beta}^{\geq 1} t^{\alpha-1}(\log t)^{\beta-2}}{t^{2\alpha}}[\beta - 1 - \alpha\log t] \\
&= \beta t^{-\alpha-1}(\log t)^{\beta-2}[\beta - 1 - \alpha\log t].
\end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta - 1 = \alpha\log t \quad \Leftrightarrow \quad t = e^{\frac{\beta-1}{\alpha}}.$$

Da $\varphi'(e^{\frac{\beta}{\alpha}}) < 0$, ist φ fallend für alle $t \in [e^{\frac{\beta-1}{\alpha}},\infty[$.

Für g gilt:

$$\varphi : t \mapsto \frac{g(t)}{t^\alpha} = \frac{\log t}{t^\alpha}.$$

$$\varphi'(t) = t^{-\alpha-1}[1 - \alpha\log t].$$

$$\varphi'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \alpha\log t \quad \Leftrightarrow \quad t = e^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Da $\varphi'(e^{\frac{2}{\alpha}}) < 0$, ist φ fallend für alle $t \in [e^{\frac{1}{\alpha}},\infty[$.

Dann erfüllen f und g die Voraussetzungen von Lemma (3) mit

$$T \geq e^{\frac{\beta-1}{\alpha}} \vee e^{\frac{1}{\alpha}}.$$

g erfüllt die Voraussetzungen von Lemma (4), da $\varphi : t \mapsto t^2g'(t) = tf(t)$ steigend auf $]T,\infty[$, da

$$\varphi'(t) = f(t) + tf'(t) \geq 0.$$

(i) *Beweis für ν symmetrisch*

Setze nun voraus, dass Y_n symmetrisch verteilt um 0 ist.

Nach Lemma (3) gilt, mit $\theta = |\, a\,|$:

$$\begin{aligned} E[f(|\, X\,|)] &= \int f(|\, x\,|)\, d\mu(x) < \infty \\ \Leftrightarrow \quad & \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \int_0^1 |\, 1 - \hat{\mu}(|\, a\,|^y\, t)\,|\; dy\, dt < \infty. \end{aligned} \tag{16}$$

Das gilt genau dann, wenn es (13) gilt, mit

$$\tau = \frac{1}{T}$$

und

$$-h'(t) = \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \qquad \text{d.h.} \qquad h(t) = f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Wir wollen Lemma (5) anwenden. Dafür müssen wir pruüfen, ob $h'(t) \leq 0$ für alle $t \in]0, \tau]$. Es ist

$$h'(t) = -\frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} = -\beta(\beta - 1)\left(\log \frac{1}{t}\right)^{\beta-2} \frac{1}{t},$$

$$\operatorname{sgn} h'(t) = -\operatorname{sgn} \log \frac{1}{t}.$$

Genau dann ist das -1, wenn $\frac{1}{t} \geq 1$. Wir wissen, dass $0 < t < \frac{1}{T} = e^{\frac{1-\beta}{\alpha}}$, und es gilt $\frac{1}{T} \leq 1$, denn $\beta \geq 1$.

Nach Lemma (5) ist (3) äquivalent zu

$$\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f(\frac{1}{t})}{t} \,|\, 1 - \hat{\nu}(t)\,|\; dt < \infty.$$

Das gilt genau dann, wenn es (10) gilt mit

$$\sigma = \nu$$

und

$$f = g \qquad (\text{da } f(s) = sg'(s)).$$

Nach Lemma (4) ist das äquivalent zu

$$E[g(|\,Y_0\,|)] < \infty.$$

(ii) *Beweis für ν nicht unbedingt symmetrisch*
Sei $\left(\tilde{X}, (\tilde{Y}_n)_n\right)$ eine unabhängige Kopie von $(X, (Y_n)_n)$.

Wende Lemma (2) (1. und 3. Punkte) an und erhalte:

$$E[g(|\,Y_0\,|)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad E\left[g\left(\left|\,Y_0 - \tilde{Y}_0\,\right|\right)\right] < \infty. \tag{17}$$

Da $Y_0 - \tilde{Y}_0$ symmetrisch verteilt um 0 und $X - \tilde{X} = \sum a^n(Y_n - \tilde{Y}_n)$, wegen (i): genau dann gilt (17), wenn $E\left[f(\left|\,X - \tilde{X}\,\right|)\right] < \infty$, und nach Lemma (2):

$$E\left[f\left(\left|\,X - \tilde{X}\,\right|\right)\right] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad E\left[f\left(|\,X\,|\right)\right] < \infty,$$

d.h.

$$E\left[f\left(|\,X\,|\right)\right] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad E\left[g\left(|\,Y_0\,|\right)\right] < \infty.$$

$\square$

4 Anhang

Sei

$$X = \sum_{n \geq 0} Y_n \, z^n$$

eine Zufallpotenzfolge, mit $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ Folge von i.i.d. Zufallsvariablen.

Der Konvergenzradius ist

$$R(\omega) = \left(\limsup_{n\to\infty} |\, Y_n(\omega)\,|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}.$$

Sei ν die Verteilungsfunktion von Y_n. ν heisst degeneriert, wenn $\nu(x) = 0$ für $x < 0$ und $\nu(x) = 1$ für $x > 0$. Mit anderen Worten, genau dann ist ν nicht degeneriert, wenn $\nu(0^+) < 1$.

Satz 6. *Wenn ν nicht degeneriert, gilt:*

- $R(\omega) = 1$ *fast sicher genau dann, wenn*

$$E\left[\log^+ |\, Y_n\,|\right] = \int_1^\infty \log x \; d\nu(x) \;<\; \infty;$$

- $R(\omega) = 0$ *fast sicher genau dann, wenn*

$$E\left[\log^+ |\, Y_n\,|\right] = \int_1^\infty \log x \; d\nu(x) \;=\; \infty.$$

Literatur

[1] Martin Zerner, *Integrability of infinite weighted sums of heavy-tailed i.i.d. random variables.*
Stoch. Proc. Appl. (2002) 99, No. 1, 81-94,
http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~zerner/pub/iidsums.pdf

[2] T. Kawata, *Fourier Analysis in Probability Theory.*
Academic Press, New York, 1972.