Integrabilität von unendlichen gewichteten Summen von i.i.d. Zufallsvariablen

Ester Dalvit

23 März 2006

1 Einleitung

Seien Y_n, $n \geq 0$ unabhängige gleichverteilte reellwertige Zufallsvariablen. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmass und E der Erwartungswertoperator. Sei $a \in \mathbb{R}$, $0 < |\, a\,| < 1$. Sei

$$X := \sum_{n \geq 0} a^n\, Y_n. \tag{1}$$

Diese Folge ist genau dann wohldefiniert als P-fast sicher absolut konvergent, wenn $E[\log^+ |\, Y_0\,|] < \infty$ (vgl. [2], S. 625). Wir setzen das voraus.

Satz 1. *Sei $\beta \geq 1$. Seien*

$$\begin{aligned} f(t) &:= \beta(\log t)^{\beta-1} \\ g(t) &:= (\log t)^{\beta} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$E[f(|\, X\,|)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad E[g(|\, Y_0\,|)] < \infty.$$

Sei ν die Verteilungsfunktion von Y_n, und μ die von X.

Sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable, mit Verteilungsfunktion ν. Dann

$$aX + Y = Y + \sum_{n \geq 0} a^{n+1} Y_n$$

hat dieselbe Verteilung wie X.

Da Y unabhängig von X, gilt für die Charakteristischen Funktionen:

$$\hat{\mu}(t) = \hat{\mu}(at)\hat{\nu}(t). \tag{2}$$

Das ist das einfachste Beispiel, in dem μ das stationäre Mass von einem linearen Prozess ist, und zwar von dem $AR(1)$-Prozess definiert durch:

$$X_{n+1} = aX_n + Y_n \qquad (n \geq 0).$$

Wir wollen den Schwanz der Distribution von X beobachten und er im Bezug auf den Schwanz der Distribution von Y_0 steht. Dafür beobachten wir wie die Integrierbarkeit von $f(|\, X\,|)$ sich auf die von $g(|\, Y_0\,|)$ bezieht (im allgemeinen Fall sind f und g positive steigende Funktionen).

von $P[|\,Y_0\,| > t]$ und $P[|\,X\,| > t]$ für $t \to \infty$. Für eine nichtnegative Zufallsvariable Z und eine positive steigende Funktion h, sind die zwei Methode korreliert, durch die Formel:

$$E[h(Z)] = \int_0^\infty P[Z > h^{-1}(t)]\, dt.$$

2 Hilfslemmas

Lemma 2. *(ohne Beweis) Seien Z, W Zufallsvariablen; sei $T > 0$ und h eine monoton steigende Funktion mit*

$$t \mapsto \frac{h(t)}{t} \quad \textit{fallend für } t \geq T. \tag{3}$$

- *Wenn $E[h(|\,Z\,|)] < \infty$ und $E[h(|\,W\,|)] < \infty$, dann $E[h(|\,Z + W\,|)] < \infty$.*
- *Sei $0 < c < \infty$. Dann: $E[h(|\,Z\,|)] < \infty \iff E[h(c\,|\,Z\,|)] < \infty$.*
- *Seien Z, W unabhängig. Für $h = f$ oder $h = g$, wenn $E[h(|\,Z + W\,|)] < \infty$, dann $E[h(|\,W\,|)] < \infty$ und $E[h(|\,Z\,|)] < \infty$.*

Lemma 3. *Sei σ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathbb{R}$. Sei $T > 0$ und $0 < \alpha < 1$ mit $f \in \mathcal{C}([0,\infty[, [0,\infty[)$ steigend auf $[0,\infty[$ und stetig differenzierbar auf $]T,\infty[$ mit*

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t^\alpha} \; \textit{fallend auf }]T,\infty[. \tag{4}$$

Sei $0 < \theta < 1$. Genau dann gilt

$$\int f(|\,x\,|)\, d\sigma(x) < \infty, \tag{5}$$

wenn

$$\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \int_0^1 |\,1 - \hat{\sigma}(\theta^y t)\,|\; dy\, dt < \infty. \tag{6}$$

Beweis. "(5) $\Longrightarrow$ (6)": Beachte,

$$|\,1 - \hat{\sigma}(t)\,| \;= \left|\,1 - \textstyle\int e^{itx} d\sigma(x)\,\right| \leq \textstyle\int |\,1 - e^{itx}\,|\, d\sigma(x) = 2 \textstyle\int \left|\sin \frac{t|\,x\,|}{2}\right| d\sigma(x).$$

Da $|\sin y\,| \leq y \wedge 1$ für $y \geq 0$, gilt

$$r(x,y) := \; 2\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \left|\sin \frac{\theta^y t\,|\,x\,|}{2}\right| dt \;\leq\; \theta^y\,|\,x\,| \int_0^{\frac{1}{T \vee |\,x\,|}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t}\, dt + 2\int_{\frac{1}{T\vee|\,x\,|}}^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2}\, dt. \tag{7}$$

Für alle $\gamma \in]0, \frac{1}{T}[$ gilt

$$\int_0^\gamma \frac{f'(\frac{1}{t})}{t}\, dt \;\leq\; \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma f\left(\frac{1}{\gamma}\right). \tag{8}$$

$t > T$, und dann gibt es eine Konstante c derart, dass für t klein (für alle $t < \frac{1}{T}$) gilt:

$$\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \leq \alpha f\left(\frac{1}{t}\right) \leq f\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{c}{t^\alpha},$$

und das ist integrierbar.

Dann für $\gamma \searrow 0$, verschwindet die linke Seite in (8). Dann ist es hinreichend zu beweisen, dass die Ableitung bezüglich γ von der linken Seite kleiner als die Ableitung von der rechten Seite ist. D.h., wir müssen prüfen, ob

$$\frac{f'\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(f\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \frac{f'\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma}\right),$$

und das gilt, wegen $tf'(t) \leq \alpha f(t)$ für alle $t > T$, und $\frac{1}{\gamma} > T$.

Dann ist das erste Glied in (7)

$$\theta^y \,|\, x \,| \int_0^{\frac{1}{T \vee |\, x\,|}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t} dt \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta^y \frac{|\, x\,|}{T \vee |\, x\,|} f(T \vee |\, x\,|) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta^y f(T \vee |\, x\,|).$$

Da f steigend, ist das zweite Glied in (7)

$$2\int_{\frac{1}{T \vee |\, x\,|}}^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\, dt = 2\left[-f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{\frac{1}{T \vee |\, x\,|}}^{\frac{1}{T}} = 2\, f(T \vee |\, x\,|) - 2\, f(T) \leq 2\, f(T \vee |\, x\,|).$$

Dann ist die linke Seite von (6)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \int_0^1 |\, 1 - \hat{\sigma}(\theta^y t)\,|\; dy\, dt \\
&\qquad \leq \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \int_0^1 2 \int \left| \sin \frac{\theta^y t\,|\, x\,|}{2} \right| d\sigma(x)\, dy\, dt \leq \int_0^1 \int r(x,y)\, d\sigma(x)\, dy \\
&\qquad \leq \int_0^1 \int \left(2 + \frac{\theta^y \alpha}{1-\alpha}\right) f(T \vee |\, x\,|)\, d\sigma(x)\, dy = \underbrace{\left(\int_0^1 2 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta^y\, dy\right)}_{\text{endlich, da } 0<\theta<1} \left(\int f(T \vee |\, x\,|)\, d\sigma(x)\right),
\end{aligned}$$

und das ist endlich nach Voraussetzung (5).

"(6) $\Longrightarrow$ (5)": Beachte,

$$|\, 1 - \hat{\sigma}(t)\,| \geq |\, 1 - Re\hat{\sigma}(t)\,| = \int 1 - \cos(t\,|\, x\,|)\, d\sigma(x).$$

Setze

$$\mathrm{Ci}(s) := \gamma + \log s + \int_0^s \frac{\cos(t) - 1}{t}\, dt$$

die Integral-Cosinusfunktion, wobei γ die Euler-Mascheroni Konstante ist, und

$$\phi(s) := \int_0^1 1 - \cos(\theta^y s)\, dy = 1 + \frac{\mathrm{Ci}(s) - \mathrm{Ci}(\theta s)}{\log \theta}.$$

$$
\begin{aligned}
\infty &> \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \int_0^1 |\, 1-\hat\sigma(\theta^y t)\,|\; dy\, dt \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \int_0^1 \int 1-\cos\left(\theta^y t\,|\,x\,|\right) d\sigma(x)\, dy\, dt = \int \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \phi(t\,|\,x\,|)\, dt\, d\sigma(x).
\end{aligned}
$$

Mit $t\,|\,x\,| = s$ erhalte:

$$
\infty > \int \frac{1}{|\,x\,|} \int_0^{\frac{|\,x\,|}{T}} f'\left(\frac{|\,x\,|}{s}\right)\left(\frac{|\,x\,|}{s}\right)^2 \phi(s)\, ds\, d\sigma(x). \tag{9}
$$

Da $\mathrm{Ci}(s) \to 0$ wenn $s \to \infty$, existiert eine Konstante $k > 0$ mit $\phi(s) \geq \frac{1}{2}$ für $s > k$. Dann ist (9) grösser als

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{|\,x\,|>kT} \int_k^{\frac{|\,x\,|}{T}} f'\left(\frac{|\,x\,|}{s}\right) \frac{|\,x\,|}{s^2}\, ds\, d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{|\,x\,|>kT} \left[-f\left(\frac{|\,x\,|}{s}\right)\right]_{s=k}^{s=\frac{|\,x\,|}{T}} d\sigma(x) = \frac{1}{2} \int_{|\,x\,|>kT} f\left(\frac{|\,x\,|}{k}\right) - f(T)\, d\sigma(x).
\end{aligned}
$$

Nach zweitem Punkt von Lemma (2) mit $c = 1/k$, gilt $\int_{|\,x\,|>T} f(|\,x\,|)\, d\sigma(x) < \infty$. Da f steigend, gilt (5). $\square$

Lemma 4. *Sei σ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathbb{R}$. Seien T, α und f wie in Lemma (3), mit $t \mapsto t^2 f'(t)$ steigend für $t > T$. Genau dann gilt*

$$
\int f(|\,x\,|)\, d\sigma(x) < \infty, \tag{10}
$$

wenn

$$
\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} |\, 1-\hat\sigma(t)\,|\; dt < \infty. \tag{11}
$$

Beweisidee. "(10) $\Longrightarrow$ (11)": Setze $\theta = 1$ in "(5) $\Longrightarrow$ (6)" in dem Beweis von Lemma (3).

"(11) $\Longrightarrow$ (10)": Ähnlich wie "(6) $\Longrightarrow$ (5)" in dem Beweis von Lemma (3). $\square$

Lemma 5. *Seien $\tau > 0$ und $h \in \mathcal{C}^1(]0,\tau],[0,\infty[)$ mit $h'(t) \leq 0$ für alle $t \in]0,\tau[$. Sei ν symmetrisch um 0. Genau dann gilt*

$$
\int_0^{\tau} \frac{h(t)}{t} |\, 1-\hat\nu(t)\,|\, dt \; < \; \infty, \tag{12}
$$

wenn

$$
\int_0^{\tau} -h'(t) \int_0^1 |\, 1-\hat\mu(|\,a\,|^y\, t)\,|\; dy\, dt \; < \; \infty. \tag{13}
$$

Beweis. Die beide Integrande sind kritisch nur in $t = 0$. Damit ist die Endlichkeit den Integralen in (12) und (13) äquivalent zu der von denselben Integralen mit T statt τ in der oberen Integrationsgrenze, für $0 < T < \tau$.

Wenn es eine Umgebung von 0 existiert, in dem h konstant ist, dann ist (13) banal erfüllt, und (12) folgt aus Lemma (4) mit $f = \log^+$ und $\sigma = \nu$.

$\hat\nu$ von die Y_n $(n \geq 0)$ symmetrisch um 0 ist, so ist auch $\hat\mu$ symmetrisch (folgt direkt aus der Definition (1) von X). Dann sind die Charakteristischen Funktionen $\hat\nu$ bzw. $\hat\mu$ von Y_n bzw. X reellwertig. Da Charakteristische Funktionen, sind sie auch stetig und gerade, und es gilt $0 \leq \hat\nu, \hat\mu \leq 1$ und $\hat\nu(0) = 1 = \hat\mu(0)$.

Dann existiert $T \in]0, \tau]$ mit $\hat\nu(t) > 0$ und $\hat\mu(t) > 0$ für alle $t \in [-T, T]$.

Da $\hat\mu(x) \to 1$ für $x \to 0$, kann man die teleskopische Summe schreiben:

$$1 - \underbrace{\hat\mu(|\,a\,|^y\, t)}_{\to 1 \text{ für } y\to\infty} = \sum_{k\geq 0} \hat\mu(|\,a\,|^{k+y+1}\, t) - \hat\mu(|\,a\,|^{k+y}\, t). \tag{14}$$

Für $|\,t\,| < T$ gilt nach (2)

$$\hat\mu(|\,a\,|^{k+y}\, t) \;= \underbrace{\hat\mu(a\,|\,a\,|^{k+y}\, t)}_{\geq 0}\, \underbrace{\hat\nu(|\,a\,|^{k+y}\, t)}_{\leq 1} \leq \hat\mu(|\,a\,|^{k+y+1}\, t),$$

wobei wird die Symmetrie von $\hat\mu$ um 0 benutzt. Dann sind die Summanten in (14) nicht negativ.

Für $|\,t\,| < T$ gilt dann nach Fubini:

$$\begin{aligned}\int_0^1 1 - \hat\mu(|\,a\,|^y\, t)\, dy \;&=\; \int_0^1 \sum_{k\geq 0} \hat\mu(|\,a\,|^{k+y+1}\, t) - \hat\mu(|\,a\,|^{k+y}\, t)\, dy \\ &=\; \sum_{k\geq 0} \int_k^{k+1} \hat\mu(|\,a\,|^{y+1}\, t) - \hat\mu(|\,a\,|^{y}\, t)\, dy = \int_0^\infty \hat\mu(|\,a\,|^{y+1}\, t) - \hat\mu(|\,a\,|^{y}\, t)\, dy.\end{aligned}$$

Setze nun $s = |\,a\,|^y\, t$. Das Integral wird

$$\int_0^1 1 - \hat\mu(|\,a\,|^y\, t)\, dy = -\frac{1}{\log|\,a\,|} \int_0^t \frac{\hat\mu(|\,a\,|\, s) - \hat\mu(s)}{s}\, ds.$$

Wegen der Symmetrie von $\hat\mu$ ist $\hat\mu(|\,a\,|\, s) = \hat\mu(as)$. Nach (2) gilt dann:

$$\int_0^1 1 - \hat\mu(|\,a\,|^y\, t)\, dy = -\frac{1}{\log|\,a\,|} \int_0^t \frac{\hat\mu(as)(1-\hat\nu(s))}{s}\, ds.$$

Dann ist (13) äquivalent zu

$$\int_0^T -h'(t) \int_0^t \frac{\hat\mu(as)(1-\hat\nu(s))}{s}\, ds\, dt < \infty. \tag{15}$$

Der Ausdruck in (15) ist äquivalent zu

$$\int_0^T \frac{\hat\mu(as)(1-\hat\nu(s))}{s} \underbrace{\int_s^T -h'(t)\, dt}_{=-h(T)+h(s)}\, ds = \int_0^T \frac{h(s)}{s} \underbrace{\left(1 - \frac{h(T)}{h(s)}\right) \hat\mu(as)}_{\phi(s)}(1-\hat\nu(s))\, ds \;<\; \infty.$$

Da h fallend in $]0, T]$ (da nach Voraussetzung $h'(t) \leq 0$ für alle $t \in]0, \tau[$ und $T \leq \tau$), folgt dass $\phi(s)$ gegen eine positive Konstante geht, wenn $s \searrow 0$.

Dann können wir $\phi(s)$ weglassen, ohne die Konvergenz des Integrals zu ändern. Damit ist ((13) äquivalent zu) (15) äquivalent zu

$$\int_0^T \frac{h(s)}{s}(1-\hat\nu(s))\, ds < \infty,$$

und dies ist äquivalent zu (12). $\square$

Beweis. f, g sind stetig, steigend und stetig differenzierbar auf $[0,\infty[$, und es gilt $f(t) = tg'(t)$.

Für $0 < \alpha < 1$ ist $t \mapsto \frac{f(t)}{t^\alpha}$ fallend auf $]e^{\frac{\beta-1}{\alpha}}, \infty[$, und $t \mapsto \frac{g(t)}{t^\alpha}$ ist fallend für alle $t \in [e^{\frac{1}{\alpha}}, \infty[$. Dann erfüllen f und g die Voraussetzungen von Lemma (3) mit $T \geq e^{\frac{\beta-1}{\alpha}} \vee e^{\frac{1}{\alpha}}$.

g erfüllt die Voraussetzungen von Lemma (4), da $t \mapsto t^2 g'(t) = tf(t)$ steigend auf $]T, \infty[$.

(i) *Beweis für ν symmetrisch*

Setze nun voraus, dass Y_n symmetrisch verteilt um 0 ist.

Nach Lemma (3) gilt, mit $\theta = |\,a\,|$:

$$E[f(|\,X\,|)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2} \int_0^1 |\,1 - \hat{\mu}(|\,a\,|^y\, t)\,|\; dy\, dt < \infty. \tag{16}$$

Das gilt genau dann, wenn es (13) gilt, mit $\tau = \frac{1}{T}$ und $-h'(t) = \frac{f'(\frac{1}{t})}{t^2}$, d.h. $h(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Da $h'(t) \leq 0$ für alle $t \in]0, \tau]$, können wir Lemma (5) anwenden. Dann ist (3) äquivalent zu

$$\int_0^{\frac{1}{T}} \frac{f(\frac{1}{t})}{t} \,|\,1 - \hat{\nu}(t)\,|\; dt < \infty.$$

Das gilt genau dann, wenn es (11) gilt mit $\sigma = \nu$ und $f = g$ (da $f(s) = sg'(s)$). Nach Lemma (4) ist das äquivalent zu $E[g(|\,Y_0\,|)] < \infty$.

(ii) *Beweis für ν nicht unbedingt symmetrisch*

Sei $\left(\tilde{X}, (\tilde{Y}_n)_n\right)$ eine unabhängige Kopie von $(X, (Y_n)_n)$.

Wende Lemma (2) (1. und 3. Punkte) an und erhalte:

$$E[g(|\,Y_0\,|)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad E\left[g\left(\left|\,Y_0 - \tilde{Y}_0\,\right|\right)\right] < \infty. \tag{17}$$

Da $Y_0 - \tilde{Y}_0$ symmetrisch verteilt um 0 und $X - \tilde{X} = \sum a^n (Y_n - \tilde{Y}_n)$, wegen (i): genau dann gilt (17), wenn $E\left[f(\left|\,X - \tilde{X}\,\right|)\right] < \infty$, und nach Lemma (2):

$$E\left[f\left(\left|\,X - \tilde{X}\,\right|\right)\right] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad E\left[f\left(|\,X\,|\right)\right] < \infty,$$

damit ist der Satz bewiesen.

□

Literatur

[1] Martin Zerner, *Integrability of infinite weighted sums of heavy-tailed i.i.d. random variables.* Stoch. Proc. Appl. (2002) 99, No. 1, 81-94, http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~zerner/pub/iidsums.pdf

[2] T. Kawata, *Fourier Analysis in Probability Theory.* Academic Press, New York, 1972.