Calcolo delle probabiltà 1 UD

15 aprile 2004

Esercizio 1. Calcolare la media e la varianza di

$$Z = [min\{X,Y\}]^2$$

con X e Y indipendenti uniformi in $(0,1)$.

Poichè X e Y assumono valori tra 0 e 1, anche X^2 e Y^2, e dunque anche Z, assumono valori in $(0,1)$. Inoltre se $X < Y$, allora anche $X^2 < Y^2$, per cui si ha:

$$Z = [min\{X,Y\}]^2 = min\{X^2, Y^2\}$$

Prendo $t \in (0,1)$ e calcolo la probabilità che $Z < t$.

$$\mathbb{P}(Z < t) = 1 - \mathbb{P}(Z \geq t) = 1 - \mathbb{P}(X^2 \geq t, Y^2 \geq t)$$

Poichè X e Y sono indipendenti, lo sono anche X^2 e Y^2, dunque

$$\mathbb{P}(Z < t) = 1 - \mathbb{P}(X^2 \geq t) \cdot \mathbb{P}(Y^2 \geq t)$$

Poichè X e Y hanno la stessa distribuzione, si ha

$$\mathbb{P}(X^2 \ \geq \ t) \ = \ \mathbb{P}(Y^2 \ \geq \ t)$$

Valutiamo questa probabilità

$$\mathbb{P}(X^2 \geq t) = \mathbb{P}(X \geq \sqrt{t}) = \int_{\sqrt{t}}^{1} \chi_{(0,1)}(x)dx$$

dove $\chi_{(0,1)}(x)$ è la funzione indicatrice di x nell'intervallo $(0,1)$. Questo significa che la densità di X è una funzione che vale 0 fuori da $(0,1)$ e 1 nell'intervallo $(0,1)$. Allora

$$\mathbb{P}(X^2 \geq t) = \int_{\sqrt{t}}^{1} dx = 1 - \sqrt{(t)}$$

La funzione di ripartizione $F_z(t)$ è

$$F_z(t) = \mathbb{P}(Z < t) = 1 - [\mathbb{P}(X^2 \geq t)]^2 = 1 - (1 - \sqrt{t})^2 = 2\sqrt{t} - t$$

La densità di Z è

$$f_z(z) = F_z'(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} - 1$$

Ora posso calcolare media e varianza di Z

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{\mathbb{R}} z f_z(z) dz = \int_0^1 (\sqrt{z} - z) dz = \frac{1}{6}$$

$$var(Z) = \int_{\mathbb{R}} (z - \mathbb{E}(Z))^2 f_z(z) dz = \int_0^1 (z - \frac{1}{6})(\frac{1}{\sqrt{z}} - 1) dz = \frac{7}{180}$$

Esercizio 2. Sia X una variabile casuale con distribuzione di probabilità esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Consideriamo la variabile casuale $Y = [X]$, in altre parole Y è la parte intera di X. Qual è la distribuzione di probabilità di Y? È una distribuzione nota? Calcolare il valore di aspettazione.

Y è una variabile aleatoria discreta, in quanto assume valori interi non negativi, dato che la densità di X è

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Inoltre si ha: $\quad Y = t \quad \Longleftrightarrow \quad t \leq X < t + 1$. Dunque

$$\mathbb{P}(Y = t) = \mathbb{P}(t < X < t + 1) = \mathbb{P}(X < t + 1) - \mathbb{P}(X < t) =$$

$$= \int_0^{t+1} f(x) dx - \int_0^t f(x) dx = \int_t^{t+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda})$$

Questa è la distribuzione di probabilità geometrica di parametro $1 - e^{-\lambda}$.

Ora potrei (ma non serve a niente) ricavare la distribuzione di Y

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq t) &= \sum_{i=0}^{t} e^{-\lambda i}(1 - e^{-\lambda}) = \sum_{i=0}^{t} e^{-\lambda i} - \sum_{i=0}^{t} e^{-\lambda(i+1)} \\ &= e^{-\lambda \cdot 0} - e^{-\lambda(t+1)} = 1 - e^{-\lambda(t+1)} \end{aligned}$$

È la stessa funzione della distribuzione di una varibile esponenziale, ma Y è una variabile aleatoria discreta. Perciò Y ha distribuzione geometrica; infatti la distribuzione geometrica è l'equivalente della distribuzione esponenziale nel caso discreto.

Torniamo all'esercizio. Calcolo ora il valore di aspettazione di Y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda i}(1 - e^{-\lambda}) = \sum_{i=1}^{\infty} i e^{-\lambda i} - e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i e^{-\lambda i} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} - e^{-\lambda} \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Ho usato la convergenza della serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} i a^i = \sum_{i=1}^{\infty} i a^i = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Il valore trovato è corretto, poichè il valore di aspettazione di una variabile con distribuzione geometrica di parametro p è $\frac{1-p}{p}$.

Esercizio 3. Due dadi vengono lanciati separatamente più volte. Sia X il numero (aleatorio) di lanci necessario a ottenere 1 con il primo dado e sia Y il numero di lanci necessario a ottenere 5 oppure 6 con il secondo.
a) Qual è la distribuzione di probabilità di X? Quella di Y?
b) Qual è la distribuzione di probabilità di Z =max(X, Y)?
c) Calcolare $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Considero un dado equo e ogni lancio indipendente dagli altri lanci.

a) Sia $k \geq 0$. Indichiamo con D_i il valore ottenuto al lancio i. Le distribuzioni di probabilità di X e Y sono queste

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(D_k = 1) \cdot \mathbb{P}(D_1 \neq 1, D_2 \neq 1, \ldots, D_{k-1} \neq 1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5^{k-1}}{6^k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(D_k = 5 \ o \ 6) \cdot \mathbb{P}(D_i \neq 5, D_i \neq 6 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k-1) \\ &= \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} = \frac{2^{k-1}}{3^k} \end{aligned}$$

b) La distribuzione di probabilità di Z è data dall'unione di tre eventi indipendenti:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k,\ Y < k) + \mathbb{P}(Y = k,\ X < k) + \mathbb{P}(X = k,\ Y = k)$$

Calcoliamo prima la probabilità che $X < k$.

$$\mathbb{P}(X < k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{5^{i-1}}{6^i} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{5}{6}\right)^i$$

Ricordando dall'analisi che per $a < 1$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

otteniamo che la probabilità

$$\mathbb{P}(X < k) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - (\frac{5}{6})^{k-1}}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

Analogamente si ottiene per Y

$$\mathbb{P}(Y < k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{i-1}}{3^i} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^{k-1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

Ora, poichè X e Y sono indipendenti, si ha

$$\mathbb{P}(Z < k) = \mathbb{P}(X < k)\mathbb{P}(Y < k) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right]\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]$$

La distribuzione di probabilità di Z è

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(X = k,\ Y < k) + \mathbb{P}(Y = k,\ X < k) + \mathbb{P}(X = k,\ Y = k) \\
&= \frac{5^{k-1}}{6^k} \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right] + \frac{2^{k-1}}{3^k} \cdot \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right] + \frac{5^{k-1}}{6^k} \cdot \frac{2^{k-1}}{3^k}
\end{aligned}$$

c) La probabilità cercata è

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y \leq i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{5^{i-1}}{6^i} \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i\right] \\
&= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i\right] = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i - \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^i \\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i - \left(\frac{5}{6}\right)^0\right] - \frac{1}{5}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^i - \left(\frac{5}{9}\right)^0\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^i\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1 - \frac{5}{6}} - \frac{1}{1 - \frac{5}{9}}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[6 - \frac{9}{4}\right] = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Si hanno due urne contenenti ciascuna 6 palline bianche e 4 palline nere. Si estraggono senza ripetizione due palline dalla prima urna e le si mettono nella seconda; da questa si estrae una pallina che risulta bianca. Qual è la probabilità che le due palline estratte dalla prima urna siano bianche?

Dalla prima urna posso estrarre due palline bianche (BB), una bianca e una nera (BN) oppure due nere (NN). Vediamo con che probabilità ogni caso si verifica.

$$\mathbb{P}(BB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(BN) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15} \tag{2}$$

$$\mathbb{P}(NN) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15} \tag{3}$$

Indichiamo con $\mathbb{P}(B_i)$ la probabilità di estrarre una pallina bianca dalla seconda urna nel caso i. Vediamo i tre casi:
Nel caso 1), la seconda urna conterrà 8 palline bianche e 4 nere. $\mathbb{P}(B_1) = \frac{8}{12}$.
Nel caso 2), la seconda urna conterrà 7 palline bianche e 5 nere. $\mathbb{P}(B_2) = \frac{7}{12}$.
Nel caso 3), la seconda urna conterrà 6 palline bianche e 6 nere. $\mathbb{P}(B_3) = \frac{6}{12}$.

Indichiamo con $\mathbb{P}(B)$ la probabilità di estrarre una pallina bianca dalla seconda urna, senza tener conto del caso in cui siamo capitati.
La probabilità richiesta, cioè di aver estratto 2 palline bianche dalla prima urna è data da:

$$\mathbb{P}(BB|B) = \frac{\mathbb{P}(BB\ e\ B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|BB) \cdot \mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(B)}$$

La probabilità di aver estratto una pallina bianca dalla seconda urna è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|BB) \cdot \mathbb{P}(BB) + \mathbb{P}(B|BN) \cdot \mathbb{P}(BN) + \mathbb{P}(B|NN) \cdot \mathbb{P}(NN) \\ &= \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{15} + \frac{6}{12} \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Allora la probabilità cercata sarà

$$\mathbb{P}(BB|B) = \frac{\frac{8}{12} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{27}$$

Esercizio 5. Le lampadine di un lotto sono difettose ciascuna con probabilità $\frac{1}{5}$, indipendentemente tra di loro. Qual è il numero minimo n di lampadine per avere una probabilità superiore a 0.99 che almeno una funzioni?
Si scelga con probabilità p il numero trovato n e con probabilità $1-p$ il numero $n-1$. Qual è il valore di p per il quale la probabilità di avere almeno una lampadina che funziona risulta uguale a 0.99?

$$\begin{aligned} 0.99 &< \mathbb{P}(\text{almeno una lampadina tra n funzioni}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{nessuna lampadina tra n funzioni}) = 1 - \frac{1}{5^n} \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene $5^n > 100$, dunque basta prendere un numero di lampadine $n \geq 3$.

Introduciamo ora una variabile casuale X, che indica quante lampadine prendiamo in considerazione.

X assume i valori	3 con probabilità	p
	2	$1-p$

Indichiamo con $\mathbb{P}(i)$ la probabilità di considerare i lampadine, con $\mathbb{P}(luce)$ la probabilità che almeno una lampadina tra quelle considerate funzioni. Notiamo che la probabilità richiesta è una probabilità condizionata dal numero di lampadine scelte, cioè dalla variabile X.

$$\begin{aligned} 0.99 &= \mathbb{P}(\text{luce} \mid 3) \cdot \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(\text{luce} \mid 2) \cdot \mathbb{P}(2) \\ &= \Big[1 - \mathbb{P}(\text{tutte rotte} \mid 3)\Big] p + \Big[1 - \mathbb{P}(\text{tutte rotte} \mid 2)\Big](1-p) \\ &= \left[1 - \frac{1}{125}\right] p + \left[1 - \frac{1}{25}\right](1-p) = \frac{4}{125} p + \frac{24}{25} \end{aligned}$$

Da quest'equazione si ricava $p = \frac{15}{16}$.