Geometria V u.d. febbraio 2003

1) 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione differenziabile definita da

$$f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

Stabilire se è un'immersione, un'embedding e trovare gli eventuali punti in cui è un diffeomorfismo locale.

2. Dimostrare che l'insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 + x^2 + yz - 2 = 0\}$$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$.

2) Sia $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile $\mathcal{C}^\infty$ parametrizzata mediante il parametro lunghezza d'arco s.

a) Si consideri la superficie formata dal tubo che avvolge γ, parametrizzata da:

$$\mathbf{P}(s, \theta) = \gamma(s) + \cos\theta\ \mathbf{n}(s) + \sin\theta\ \mathbf{b}(s),$$

dove $s \in (-1, 1)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $\mathbf{n}$ indica il versore normale e $\mathbf{b}$ il versore binormale lungo γ. Calcolare il versore normale della superficie e la prima forma quadratica fondamentale in funzione di θ, della curvatura e della torsione di γ.

b) Dimostrare che la curva data da $s = s_0$ (s_0 è una costante) è una geodetica.

3) Sia S la superficie elementare descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\mathbf{P}(u, v) = (u, v, uv).$$

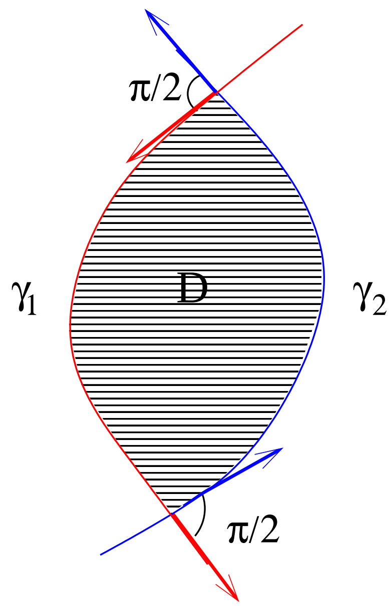
a) Si determini la natura dei punti di S.

b) Si determinino le curvature e le direzioni principali di S nel punto Q di coordinate $(2, 2, 4)$.

c) Le linee coordinate ($u = cost.$, $v = cost.$) sono linee asintotiche?

d) Si provi che S è una superficie rigata e si dica se è o meno sviluppabile.

4)
- Sia S una superficie compatta orientabile $\subset \mathbb{R}^3$ con curvatura di Gauss sempre positiva. Si provi che S è omeomorfa alla sfera $\mathbf{S^2}$.
- Sia S una superficie $\subset \mathbb{R}^3$ con curvatura di Gauss sempre negativa; si provi che su S non possono esistere due geodetiche che sono il bordo di una regione semplice D come in figura



Geometria V u.d. luglio 2003

1) Siano $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ e $f : U \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \to (x\cos y, x\sin y)$. Dimostrare che f è un diffeomorfismo locale in ogni punto di U e determinare un aperto massimale $V \subset U$ tale che la restrizione $f_{|V}$ sia un diffeomorfismo sull'immagine.

2) Sia $\mathbf{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva fortemente regolare con curvatura e torsione costanti e uguali a uno: $\kappa \equiv \tau \equiv 1$.
Si provi che $\mathbf{P}$ è isometrica a un'elica cilindrica.

3) Sia $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ la curva di equazioni

$$\gamma(u) = (u, 0, \frac{1}{u}).$$

Sia S la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse z.

a) La curvatura di Gauss di S è di segno costante?

b) Si determinino le curvature e le direzioni principali di S nel punto Q di coordinate $(1,0,1)$.

c) Le direzioni principali in P sono anche direzioni asintotiche?

4) Sapendo che ogni superficie differenziabile compatta di $\mathbb{R}^3$ ha curvatura di Gauss positiva almeno in un punto, si provi che non esistono superfici differenziabili compatte minimali in $\mathbb{R}^3$.

Geometria V u.d. 11 febbraio 2004

1) Provare che se $A \subset M$ è un aperto connesso di una varietà differenziabile M allora anche A è una varietà differenziabile.

Sapendo che $GL(2,\mathbb{R})^+ \subset \mathbb{R}^4$, il gruppo delle matrici invertibili 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ a determinante positivo è connesso, provare che è una sottovarietà.

2) Mostrare che la curvatura $\kappa(s) \neq 0$ di una curva regolare $\mathbf{P} : I \to \mathbb{R}^3$ è uguale in modulo alla curvatura della curva piana $\pi \circ \mathbf{P}$, dove π è la proiezione ortogonale di $\mathbf{P}$ sul piano osculatore. (Suggerimento: può essere utile considerare la forma canonica locale di $\mathbf{P}$).

3) Si consideri la superficie elementare $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita in questo modo:

$$\mathbf{P}(u,v) = (u, v, u^2 + 2v^2).$$

- Si determini la natura dei punti di S.
- Si determinino le curvature e le direzioni principali di S nel punto $Q = (0,0,0)$.
- Si determini la curvatura normale di S in Q lungo la direzione individuata dal vettore di $T_Q S$ di coordinate $(1,1)$.
- La curva su S di equazione $v = 0$ è una linea di curvatura?

4) Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\begin{cases} x = f(u) \\ z = u \end{cases},$$

con $f(u) > 0$ e dove u è il parametro naturale di γ. Sia poi S la superficie di rotazione

$$\begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\sin v \\ z = u \end{cases}.$$

I meridiani e i paralleli di S, con parametrizzazione naturale, sono geodetiche?

Descrivere le rigate delle normali a S lungo i meridiani e lungo i paralleli. Si tratta di rigate sviluppabili?