

Geometria V unità didattica
Corso di Esercitazioni

Corso di laurea in Matematica
Trento, A.A. 2002-2003

Elisa Tasso

Indice

1	Varietà differenziabili	1
1.1	Esempi	1
1.2	Diffeomorfismi (globali)	5
1.3	Spazio tangente: differenziale, jacobiana	
	Immersioni, sommersioni, embedding, diffeomorfismi locali	6
2	Curve nello spazio	9
2.1	Parametro arco, terna di Frenet, curvatura e torsione	9
3	Curve piane	15
4	Superfici	21
4.1	Prima forma fondamentale, lunghezza di curve, angoli tra vettori, isometrie . . .	21
4.2	Seconda forma fondamentale, curvature, tipo di punti	25
4.3	Geodetiche, linee di curvatura, linee asintotiche, rigate sviluppabili	29
5	Esercizi proposti	35
6	Bibliografia essenziale	39

Prima lezione

1 Varietà differenziabili

Definizione 1. Sia X una varietà topologica di dimensione n . Sia (U, φ) una carta coordinata su X , cioè U è un aperto di X e φ è un omeomorfismo di U sull'aperto $\varphi(U)$ di \mathbb{R}^n . Una famiglia di carte $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ definisce un atlante differenziabile su X se $X = \bigcup_i U_i$ e le carte di \mathcal{U} sono a due a due differenziabilmente compatibili, cioè se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ allora $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^∞ . Se X è dotata di tale atlante allora è detta *varietà differenziabile* (v.d.).

Due atlanti sono *equivalenti* se definiscono la stessa struttura di varietà differenziabile, ovvero se la loro unione è ancora un atlante differenziabile.

1.1 Esempi

1. Ogni spazio discreto X è una v.d. di dim 0, basta prendere come atlante (differenziabile) $\{(\{p\}, 0)\}_{p \in X}$ dove $0 : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0 = \{0\}, \forall p \in X$ (l'intersezione degli aperti coordinati è vuota, non c'è niente da verificare).
2. \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n è una v.d. di dimensione n . La struttura può essere definita da un atlante costituito da un'unica carta $\{(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})\}$.

Ogni aperto U di \mathbb{R}^n è una v.d. di dimensione n , come atlante basta prendere $\{(U, \iota)\}$ dove $\iota : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è l'inclusione.

osservazione: consideriamo su \mathbb{R} i due atlanti $\mathcal{U}_1 = \{(U_1, \varphi_1)\}$ con $U_1 = \mathbb{R}$ e $\varphi_1 = 1_{\mathbb{R}}$, e $\mathcal{U}_2 = \{(U_2, \varphi_2)\}$ con $U_2 = \mathbb{R}$ e $\varphi_2(t) = t^3, \forall t \in \mathbb{R}$. Entrambi sono atlanti differenziabili su \mathbb{R} .

* domanda: Sono equivalenti?

* risposta: $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow t^3$ non è un diffeomorfismo (l'inversa $\sqrt[3]{t}$ non è derivabile in 0), perciò non sono equivalenti e quindi definiscono 2 strutture diverse.

Sebbene le due strutture definite sopra su \mathbb{R} non siano equivalenti, esse risultano diffeomorfe, basta considerare la mappa $(\mathbb{R}, id) \rightarrow (\mathbb{R}, t^3) : t \rightarrow \sqrt[3]{t}$.

♠ In generale, per $n \neq 4$, tutte le strutture su \mathbb{R}^n sono diffeomorfe tra di loro (Stallings), mentre su \mathbb{R}^4 ci sono un'infinità non numerabile di strutture differenziabili non diffeomorfe tra di loro (S.Donaldson, 1983)!!

3. la n-sfera S^n

Per definizione

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$$

La topologia che consideriamo su S^n è quella indotta da \mathbb{R}^{n+1} .

Un atlante differenziabile su S^n è dato da $\mathcal{U} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ dove

$N = (0, 0, \dots, 0, 1), U = S^n \setminus \{N\}; S = (0, 0, \dots, 0, -1), V = S^n \setminus \{S\}$ e φ e ψ sono le proiezioni stereografiche

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

φ è continua e la sua inversa (continua) è

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \left(\frac{2y_1}{1 + \sum y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum y_i^2}, \frac{\sum y_i^2 - 1}{1 + \sum y_i^2} \right)$$

e analogamente

$$\psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow V : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \left(\frac{2y_1}{1 + \sum y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum y_i^2}, \frac{1 - \sum y_i^2}{1 + \sum y_i^2} \right)$$

pertanto φ e ψ sono omeomorfismi su \mathbb{R}^n .

Verifichiamo la compatibilità: $U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}, \psi(U \cap V) = \varphi(U \cap V) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \left(\frac{y_1}{\sum y_i^2}, \dots, \frac{y_n}{\sum y_i^2} \right)$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow \left(\frac{y_1}{\sum y_i^2}, \dots, \frac{y_n}{\sum y_i^2} \right)$$

le mappe sono C^∞ quindi abbiamo una struttura differenziabile.

osservazione: soffermiamoci su S^1 . Consideriamo $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$ dove $U_1 = \{(x, y) \in S^1, y > 0\}, U_2 = \{(x, y) \in S^1, y < 0\}, U_3 = \{(x, y) \in S^1, x > 0\}, U_4 = \{(x, y) \in S^1, x < 0\}$ e le $\varphi_i : U_i \rightarrow (-1, 1)$ sono le proiezioni $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = x, \varphi_3(x, y) = \varphi_4(x, y) = y$. Sono omeomorfismi su aperti di S^1 con la top.indotta da \mathbb{R}^2 . Verifichiamo la compatibilità dove gli aperti delle carte coordinate si intersecano: $\varphi_1^{-1}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$, analogamente per le altre.

Ad esempio, (U_1, φ_1) e (U_3, φ_3) sono compatibili: $\varphi_1(U_1 \cap U_3) = \varphi_3(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$ e

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1) : t \rightarrow (t, \sqrt{1 - t^2}) \rightarrow \sqrt{1 - t^2}$$

$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1) : t \rightarrow (\sqrt{1 - t^2}, t) \rightarrow \sqrt{1 - t^2}$$

sono C^∞ , analog. per gli altri cambiamenti di carte. Quindi abbiamo un altro atlante differenziabile su S^1 .

* domanda: I due atlanti visti sono equivalenti?

* risposta: $U \cap U_1 \neq \emptyset$,

$$\varphi \circ \varphi_1^{-1} : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty) : t \rightarrow \frac{t}{1 - \sqrt{1 - t^2}}$$

$$\varphi_1 \circ \varphi^{-1} : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow (-1, 0) \cup (0, 1) : t \rightarrow \frac{2t}{1 + t^2}$$

sono C^∞ , analog. per le altre carte, quindi i due atlanti definiscono la stessa struttura su S^1 .

Alcuni risultati a riguardo:

- sia su S^2 che su S^3 , tutte le strutture differenziabili sono diffeomorfe tra di loro.
- ★ su S^7 di \mathbb{R}^8 esistono 28 strutture differenziabili non diffeomorfe tra di loro (J.Milnor, On manifolds omeomorphic to the sphere S^7 , Ann.of Math., 64 (1956), 399-405)

Inoltre

♣ è stato trovato un esempio di varietà topologica di dimensione 10 che non ammette alcuna struttura differenziabile (W.Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math.Helv., 34 (1960), 257-270).

4. Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$

Otteniamo $\mathbb{R}P^n$ come quoziente su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, dove due punti $x = (x_0, \dots, x_n)$ e $y = (y_0, \dots, y_n)$ sono equivalenti se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ tale che $x_i = \lambda y_i, \forall i$. La classe di $x = (x_0, \dots, x_n)$ viene indicata con $[x_0 : \dots : x_n]$ e x_0, \dots, x_n sono dette le coordinate omogenee di x .

Su $\mathbb{R}P^n$ poniamo la topologia quoziente, cioè $U \subset \mathbb{R}P^n$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, di conseguenza la mappa quoziente π è continua.

Poiché $\mathbb{R}P^n$ è quoziente di uno spazio connesso, anche esso lo è.

Per vedere che $\mathbb{R}P^n$ verifica il secondo assioma di numerabilità usiamo la seguente

proposizione: sia $\pi : X \rightarrow X / \sim$ una mappa quoziente, X verichi il secondo assioma di numerabilità e π sia una mappa aperta, allora anche X / \sim verifica il secondo assioma di numerabilità.

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, allora $\pi(U)$ è aperto essendo $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^*} \varphi_t(U)$,

dove φ_t è l'omeomorfismo $\varphi_t : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x \rightarrow tx$, per $t \in \mathbb{R}^*$ fissato.

Per vedere che $\mathbb{R}P^n$ è uno spazio di Hausdorff utilizziamo la

proposizione: sia $\pi : X \rightarrow X / \sim$ una mappa quoziente, con X spazio di Hausdorff, π aperta e il grafico di π chiuso, allora X / \sim è uno spazio di Hausdorff.

Il grafico della nostra mappa quoziente coincide con $f^{-1}(0)$ dove f è la mappa continua $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : (x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) \rightarrow \sum_{i \neq j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$.

Definiamo ora l'atlante su $\mathbb{R}P^n$: $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$, dove

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0\}$$

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n : [x_0, \dots, x_n] \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

U_i è aperto perché $\pi^{-1}(U_i)$ è aperto, gli U_i ricoprono $\mathbb{R}P^n$, φ_i è continua perché (vedi prop.7.4 di Geometria 2 di E.Sernesi)

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cap \{x_i \neq 0\} \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^n$$

è continua.

L'inversa di $\varphi_i, \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i : (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \rightarrow [x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$, è continua.

Su $U_i \cap U_j$ il cambiamento di carte è dato da

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \quad \varphi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ (u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) &\rightarrow \left(\frac{u_0}{u_j}, \dots, \frac{u_{i-1}}{u_j}, \frac{1}{u_j}, \frac{u_{i+1}}{u_j}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_j}, \frac{u_{i+1}}{u_j} \right) \end{aligned}$$

che è una mappa C^∞ .

osservazione: poiché $\mathbb{R}P^n$ si può ottenere anche come quoziente sulla mappa ristretta $\pi|_{S^n} : S^n \rightarrow S^n / \sim, \mathbb{R}P^n$ è una varietà compatta perché S^n lo è.

5. Le varietà prodotto.

Poiché sussiste il seguente

Teorema: se X e Y sono varietà differenziabili, $\dim(X) = n, \dim(Y) = m$, allora il loro prodotto cartesiano $X \times Y$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n + m$ tale che le proiezioni $X \times Y \rightarrow X$ e $X \times Y \rightarrow Y$ sono applicazioni differenziabili

dagli esempi di varietà differenziabili appena visti, possiamo costruire altri esempi:

- a. il cilindro di base $S^1, S^1 \times \mathbb{R}$:

come atlante possiamo prendere

$$\mathcal{U} = \{((S^1 \setminus \{N\}) \times \mathbb{R}, \varphi_N \times id_{\mathbb{R}}), ((S^1 \setminus \{S\}) \times \mathbb{R}, \varphi_S \times id_{\mathbb{R}})\}$$

dove φ_N, φ_S sono rispettivamente le proiezioni dal polo nord e dal polo sud.

- b. il toro n-dimensionale, $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$

Ad esempio, come atlante su T^2 possiamo considerare:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \{ &((S^1 \setminus \{N\}) \times (S^1 \setminus \{N\}), \varphi_N \times \varphi_N), \\ &((S^1 \setminus \{N\}) \times (S^1 \setminus \{S\}), \varphi_N \times \varphi_S), \\ &((S^1 \setminus \{S\}) \times (S^1 \setminus \{S\}), \varphi_S \times \varphi_S), \\ &((S^1 \setminus \{S\}) \times (S^1 \setminus \{N\}), \varphi_S \times \varphi_N) \} \end{aligned}$$

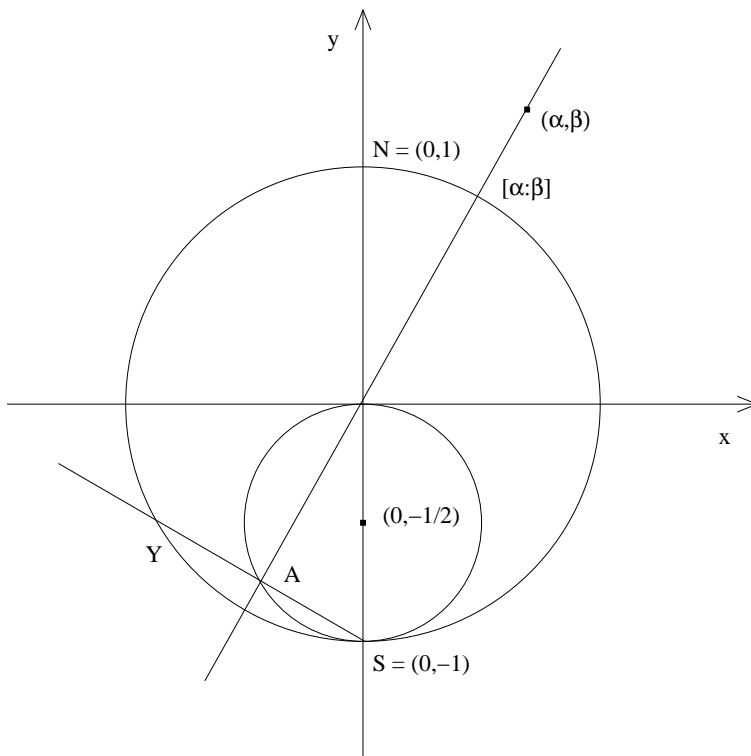
Seconda lezione

1.2 Diffeomorfismi (globali)

Se due varietà sono diffeomorfe allora esse sono anche omeomorfe, quindi, poiché \mathbb{R}^n non è compatto mentre sia S^n che $\mathbb{R}P^n$ lo sono, risulta che \mathbb{R}^n non è diffeomorfo né a S^n né a $\mathbb{R}P^n$.

Dimostriamo ora che

★ $\mathbb{R}P^1$ è diffeomorfo a S^1 (con le strutture viste):



Sia $F : \mathbb{R}P^1 \rightarrow S^1$ la mappa definita nel modo seguente:

dato $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, si consideri il punto A , intersezione della retta per l'origine e il punto dato con la circonferenza di centro $(0, -1/2)$ e raggio $1/2$ diversa da $(0, 0)$; sia poi Y il punto intersezione della retta per A e il polo sud $S = (0, -1)$ con S^1 . Definiamo

$$F([\alpha : \beta]) = Y = \left(-\frac{2\beta\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$$

La mappa è ben definita perché non dipende dal rappresentante scelto.

Dalla costruzione si vede che F è biettiva. Verifichiamo la differenziabilità sulle carte mantenendo le notazioni usate in precedenza.

Poiché se $x_0 \neq 0$ allora $F([x_0 : x_1]) \neq (0, -1)$, $F(U_0) \subset V$, analogamente $F(U_1) \subset U$. Perciò è sufficiente verificare che $\psi \circ F \circ \varphi_0^{-1}$ e $\varphi \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ sono mappe C^∞ :

$$\psi \circ F \circ \varphi_0^{-1} : t \rightarrow [t : 1] \rightarrow \left(-\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) \rightarrow -t$$

$$\varphi \circ F \circ \varphi_1^{-1} : t \rightarrow [1 : t] \rightarrow \left(-\frac{2t}{t^2 - 1}, \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\right) \rightarrow -t$$

Pertanto la mappa F è un diffeomorfismo.

★ Per $n \geq 2$, \mathbb{RP}^n non è diffeomorfo a S^n , perchè \mathbb{RP}^n e S^n non sono omeomorfi, infatti $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mentre $\pi_1(S^n) = \{1\}$.

1.3 Spazio tangente: differenziale, jacobiana Immersioni, sommersioni, embedding, diffeomorfismi locali

nota: la struttura differenziabile su \mathbb{R}^n sarà sempre quella standard $\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$.

1. Sia $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ la traslazione di vettore $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$.
Il differenziale di f in $t_0 \in \mathbb{R}^m$ è l'applicazione lineare $df|_{T_x \mathbb{R}^m} : T_x \mathbb{R}^m \rightarrow T_{x+v} \mathbb{R}^m$, definita in coordinate locali dalla matrice jacobiana della forma locale della f , ovvero $id_{\mathbb{R}^m} \circ f \circ id_{\mathbb{R}^m}^{-1} = f$. Poiché, se $x = (x_1, \dots, x_m)$, $f(x) = (x_1 + v_1, \dots, x_m + v_m)$, otteniamo $J(f) = I_m$, quindi $df|_{T_x \mathbb{R}^m} = id_{T_x \mathbb{R}^m}$.
2. Sia

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow (\cos(2\pi t), \sin 2\pi t)$$

L'immagine di F è la circonferenza S^1 . La matrice associata a $d_{t_0} F : T_{t_0} \mathbb{R} \rightarrow T_{F(t_0)} \mathbb{R}^2$ in coordinate locali è

$$J(F)(t_0) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin(2\pi t_0) \\ 2\pi \cos(2\pi t_0) \end{pmatrix}$$

Poiché $rk(J(F)(t_0)) = 1, \forall t_0 \in \mathbb{R}$, $d_{t_0} F$ è iniettivo $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ e F è un'immersione. Ovviamente, per motivi di dimensioni, $d_{t_0} F$ non può essere suriettivo per alcun valore di t_0 e quindi F non è sommersiva in alcun punto. F non è nemmeno iniettiva, quindi non è un embedding.

3. Sia

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \left(2 \cos\left(2 \arctan t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(4 \arctan t + \pi\right)\right)$$

La matrice associata a $d_{t_0} F : T_{t_0} \mathbb{R} \rightarrow T_{F(t_0)} \mathbb{R}^2$ in coordinate locali è

$$J(F)(t_0) = \begin{pmatrix} -4 \sin\left(2 \arctan t_0 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{1+t_0^2} \\ 4 \cos\left(4 \arctan t_0 + \pi\right) \frac{1}{1+t_0^2} \end{pmatrix}$$

Con qualche conto si verifica che $rk(J(F)(t_0)) = 1, \forall t_0 \in \mathbb{R}$ e quindi che $d_{t_0} F$ è iniettivo $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ e F è un'immersione. Come nel caso precedente, F non è sommersiva in alcun punto. F è iniettiva, continua, ma non è un omeomorfismo sull'immagine, infatti un intorno (piccolo) dell'origine sulla curva non può essere omeomorfo a un intorno (piccolo) di un punto di \mathbb{R} . Pertanto F non è un embedding.

4. Sia

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$$

La matrice associata a $d_{t_0}F : T_{t_0}\mathbb{R} \rightarrow T_{F(t_0)}\mathbb{R}^3$ in coordinate locali è

$$J(F)(t_0) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin(2\pi t_0) \\ 2\pi \cos(2\pi t_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$rk(J(F)(t_0)) = 1, \forall t_0 \in \mathbb{R}$ e quindi $d_{t_0}F$ è iniettivo $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ e F è un'immersione.

F non è sommersiva in alcun punto.

F è iniettiva, continua e l'inversa $G : F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \rightarrow z$ è continua, perciò F è un omeomorfismo sull'immagine e pertanto è un embedding.

Il seguente teorema ci permette di trovare delle sottovarietà senza dover costruire atlanti differenziabili:

teorema: sia $F : M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile tra varietà differenziabili. Se $q \in N$ è tale che in ogni punto di $F^{-1}(q)$ la F è sommersiva, allora $F^{-1}(q)$ è una sottovarietà di M di dimensione $dim M - dim N$.

Esempi

1. Sia

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

La matrice associata a $d_x F : T_x \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T_{\|x\|^2} \mathbb{R}$ in coordinate locali è

$$J(F)(x) = (2x_1 \quad \dots \quad 2x_{n+1})$$

Se $x \in F^{-1}(1)$ allora $x \neq 0$ e $rk(J(F)(x)) = 1, \forall x \in F^{-1}(1)$, quindi in questi punti F è sommersiva e dal teorema $F^{-1}(1) = S^n$ è una sottovarietà di \mathbb{R}^{n+1} di dimensione n .

2. Sia

$$F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{2n}) \rightarrow (x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2)$$

La matrice associata a $d_x F : T_x \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_{F(x)} \mathbb{R}^n$ in coordinate locali è

$$J(F)(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2x_{2n-1} & 2x_{2n} \end{pmatrix}$$

F non è sommersiva in x se e solo se $rk(J(F)(x)) < n$ ovvero se e solo se $\exists i, 1 \leq i \leq n$, tale che $(x_{2i-1}, x_{2i}) = (0, 0)$. Quindi nei punti di $F^{-1}((1, \dots, 1))$ la F è sommersiva quindi $F^{-1}((1, \dots, 1)) = T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$ è una sottovarietà di \mathbb{R}^{2n} di dimensione n .

Definizione: $F : M \rightarrow N$ applicazione differenziabile tra varietà differenziabili è un *diffeomorfismo locale* in $x \in M$ se esiste un intorno aperto U di x tale che $F|_U$ è un diffeomorfismo su un intorno aperto di $F(x)$. F è un diffeomorfismo locale se lo è in tutti i punti di M .

Teorema: $F : M \rightarrow N$ applicazione differenziabile tra varietà differenziabili è un diffeomorfismo locale in $x \in M$ se e solo se $d_x F$ è un'applicazione biiettiva.

Esempio:

Sia $F : S^1 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x$ la proiezione sull'asse x .

Se $(x, y) \in S^1 \setminus \{(0, -1)\}$, allora in coordinate locali la matrice associata a $d_{(x,y)} F$ è

$$J(F \circ \varphi_S^{-1})(\varphi_S(x, y)) = (2(1+y)^2 y)$$

essendo φ_S la proiezione stereografica dal polo sud $S = (0, -1)$, $F \circ \varphi_S^{-1}(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\varphi_S(x, y) = \frac{x}{1+y}$. $d_{(x,y)} F$ è biiettivo se e solo se $rk(J(F \circ \varphi_S^{-1})(\varphi_S(x, y))) = 1$ ovvero $\neq 0$, e ciò si verifica se e solo se $(x, y) \notin \{(1, 0), (-1, 0)\}$. Analogamente per l'altra carta, $(S^1 \setminus \{(0, 1)\}, \varphi_N)$, quindi F è un diffeomorfismo locale in tutti i punti di S^1 diversi da $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

Considerando al posto della proiezione F sull'asse delle x la proiezione sull'asse delle y , si trova un diffeomorfismo locale in tutti i punti di S^1 diversi da $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Terza lezione

2 Curve nello spazio

1. interpretazione geometrica della curvatura

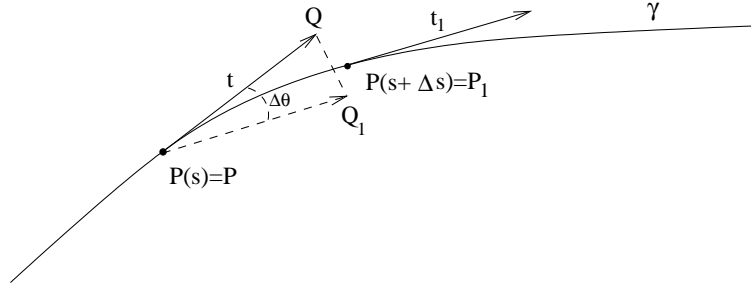
Sia γ una curva parametrizzata con parametro d'arco s , P e P_1 i punti sulla curva individuati rispettivamente da s e $s + \Delta s$, t e t_1 i versori tangenti alla curva nei punti P e P_1 .

Se Δs rappresenta la lunghezza dell'arco di γ di estremi P e P_1 e $\Delta\theta$ l'angolo individuato dai versori t e t_1 otteniamo

$$\frac{|t_1 - t|}{\Delta s} = \frac{QQ_1}{\Delta s} = \frac{QQ_1 \Delta\theta}{\Delta\theta \Delta s}$$

e la curvatura è

$$k = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|t_1 - t|}{\Delta s} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{QQ_1}{\Delta\theta} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\Delta\theta} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$



Quindi la curvatura si può considerare come limite del rapporto tra l'angolo $\Delta\theta$ e il corrispondente arco di curva al tendere di quest'ultimo a 0.

2. una retta ha curvatura nulla e viceversa, una curva con curvatura nulla ha immagine contenuta in una retta:

infatti, per una retta, l'angolo $\Delta\theta$ è costantemente uguale a 0; se poi $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva con curvatura nulla in tutti i punti, allora, supponendo di avere la curva in parametro d'arco s ,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k(s) \vec{n} \equiv 0 \Rightarrow \vec{t}(s) = \overrightarrow{cost} = (c_1, c_2, c_3), \quad \forall s$$

Quindi, essendo $\vec{t}(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s))$, $\alpha_i(s) = c_i s + d_i$, $c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

2.1 Parametro arco, terna di Frenet, curvatura e torsione

1. Una retta affine in \mathbb{R}^n

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow a + vt = (a_1 + v_1 t, \dots, a_n + v_n t) \quad a, v \in \mathbb{R}, v \neq 0$$

è ovviamente una curva differenziabile, regolare ($\|\frac{dP}{dt}(t_0)\| = \|v\| \neq 0$). Però non è fortemente regolare ($P'(t) = v$, $P''(t) = 0$ e quindi non sono linearmente indipendenti in nessun punto), quindi non è definita la terna di Frenet; ha comunque senso parlare di versore tangente e curvatura. Il versore tangente alla retta nel punto $P(t)$ è

$$\vec{t} = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|}$$

e, ovviamente, la curvatura della retta nel punto $P(t)$ è $k(t) = \|P''(t)\| = 0$. Supponiamo ora $n = 3$, il parametro d'arco con punto fissato $t_0 = 0$ è

$$s(t) = \int_0^t \|P'(u)\| du = \int_0^t \|v\| du = \|v\|t$$

da qui vediamo che se $\|v\| = 1$ la retta è già scritta in parametro d'arco, altrimenti la riparametrizzazione della retta a velocità unitaria (i.e. con parametro d'arco) è

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{s^{-1}} \mathbb{R} \xrightarrow{P} \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow \frac{1}{\|v\|}t \longrightarrow a + \frac{v}{\|v\|}t \end{aligned}$$

2. Sia P la curva data dall'equazione parametrica

$$P(t) = (\arctan t, \frac{\sqrt{2}}{2} \log(1+t^2), t - \arctan t)$$

Determiniamo il parametro d'arco e la terna di Frenet, la curvatura e la torsione nel punto generico della curva.

Si tratta di una curva differenziabile perché lo sono le sue componenti e osserviamo che

$$P'(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right) \neq (0, 0, 0), \quad \forall t$$

quindi la curva è *regolare*.

Inoltre

$$P''(t) = \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{\sqrt{2}(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \frac{2t}{(1+t^2)^2} \right)$$

per cui la curvatura in $P(t)$ è

$$k(t) = \|P''(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}$$

Notiamo che, essendo $P'(t)$ e $P''(t)$ linearmente indipendenti in tutti i punti, la curva è *fortemente regolare*.

Fissato il punto $t_0 = 0$, essendo $\|P'(t)\| = 1$, il parametro d'arco è

$$s(t) = \int_0^t \|P'(u)\| du = t$$

perciò, in questo caso, la curva è scritta già in parametro d'arco.
 Il versore tangente alla curva in $P(s)$ è

$$\vec{t} = \frac{P'(s)}{\|P'(s)\|} = \left(\frac{1}{1+s^2}, \frac{\sqrt{2}s}{1+s^2}, \frac{s^2}{1+s^2} \right)$$

Il versore normale alla curva in $P(s)$ è

$$\vec{n} = \frac{P''(s)}{\|P''(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2s}{1+s^2}, \frac{\sqrt{2}(1-s^2)}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2} \right)$$

il versore binormale alla curva in $P(s)$ è

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+s^2)^2} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \sqrt{2}s & s^2 \\ -2s & \sqrt{2}(1-s^2) & 2s \end{vmatrix} = \frac{1}{1+s^2} (s^2, -\sqrt{2}s, 1)$$

Per trovare la torsione usiamo la terza formula di Frenet $\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{(1+s^2)^2} (2s, \sqrt{2}s^2 - \sqrt{2}, -2s)$$

confrontando le componenti di \vec{n} con quelle di $\frac{d\vec{b}}{ds}$ vediamo che la torsione della curva in $P(s)$ deve essere

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{1+s^2}$$

3. la cubica gobba

Questa curva è data in forma parametrica dall'espressione

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (t, t^2, t^3)$$

È una curva differenziabile, regolare (per tutti i t , $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2) \neq (0, 0, 0)$) ed è anche fortemente regolare ($\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$ e $\alpha'(t)$ sono linearmente indipendenti $\forall t$). Di conseguenza esiste la terna di Frenet che ora andiamo a calcolare.
 Cerchiamo il parametro d'arco (di punto iniziale lo 0).

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} du$$

la funzione integranda è di tipo ellittico quindi l'integrale non si può esprimere tramite funzioni elementari, quindi usiamo le formule per parametro arbitrario: il versore tangente alla curva in $\alpha(t)$ è

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} (1, 2t, 3t^2);$$

il versore binormale alla curva in $\alpha(t)$ è

$$B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} = \frac{1}{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}} (6t^2, -6t, 2);$$

il versore normale alla curva in $\alpha(t)$ è

$$N = B \wedge T = \frac{1}{2\sqrt{(1+4t^2+9t^4)(1+9t^2+9t^4)}}(-18t^3-4t, 2-18t^4, 12t^3+6t).$$

La curvatura e la torsione della curva nel punto $\alpha(t)$ sono rispettivamente

$$K = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{\sqrt{(9t^4+4t^2+1)^3}}$$

e

$$\tau = \frac{\alpha' \wedge \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{3}{9t^4+9t^2+1}$$

4. Verificare che la curva seguente è *piana* e determinare il piano su cui giace, la terna di Frenet, la curvatura e la torsione.

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (t, e^t, t)$$

È una curva differenziabile, regolare ($\alpha'(t) = (1, e^t, 1) \neq (0, 0, 0), \forall t$), fortemente regolare ($\alpha''(t) = (0, e^t, 0)$ perciò $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ sono linearmente indipendenti $\forall t$), quindi possiamo calcolare la terna di Frenet e le formule di derivazione della base.

Per vedere che la curva è piana possiamo procedere in due modi equivalenti:

troviamo che la torsione $\tau \equiv 0$, oppure che il piano osculatore è costante.

Calcoliamo la torsione della curva in $\alpha(t)$.

$$\alpha' \wedge \alpha'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & e^t & 1 \\ 0 & e^t & 0 \end{vmatrix} = (-e^t, 0, e^t), \quad \|\alpha' \wedge \alpha''\| = \sqrt{2}e^t,$$

$$\alpha'''(t) = (0, e^t, 0) = \alpha''$$

perciò

$$\tau = \frac{\alpha' \wedge \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \equiv 0$$

Il versore tangente alla curva in $\alpha(t)$ è

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2+e^{2t}}}(1, e^t, 1)$$

il versore binormale alla curva in $\alpha(t)$ è

$$B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

il versore normale alla curva in $\alpha(t)$ è

$$N = B \wedge T = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+e^{2t}}}(-e^t, 2, -e^t)$$

la curvatura della curva nel punto $\alpha(t)$ è

$$K = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{(2 + e^{2t})^3}}$$

Il piano osculatore Π_t alla curva in $\alpha(t)$ è dato in forma vettoriale

$$\alpha(t) + \langle T(t), N(t) \rangle$$

e l'equazione cartesiana sarà del tipo $ax + by + cz + d = 0$. Poiché (a, b, c) individua la direzione ortogonale al piano Π_t , possiamo prendere $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$, osservando le componenti di B . Imponendo infine il passaggio a Π_t per $\alpha(t)$ troviamo che l'equazione del piano osculatore nel punto $\alpha(t)$ è

$$x - z = 0$$

Esso non dipende dal parametro t ed è il piano su cui giace la curva.

5. Sia P la curva definita da

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Verificare che la curva ha immagine contenuta nel cono di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e verificare che per ogni punto p sulla curva, l'angolo tra la curva e la generatrice del cono passante per p è costante.

(l'angolo tra due curve = l'angolo tra le tangenti rispettive nel punto comune)

Sostituendo le componenti abbiamo

$$(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2 - (e^t)^2 = 0$$

per cui la curva appartiene al cono.

Poiché il cono ha vertice nell'origine, l'angolo tra la curva e la generatrice del cono per un punto p sulla curva è l'angolo tra il versore tangente alla curva in p , $\vec{t}(t)$, e il vettore Op .

$$\vec{t}(t) = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 1)$$

Se α è l'angolo in questione, allora

$$\cos \alpha = \frac{Op \cdot \vec{t}(t)}{\|Op\| \|\vec{t}(t)\|} = \frac{(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \cdot (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 1)}{\sqrt{2}e^t \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

ed è costante.

6. Sia $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva dotata di terna di Frenet la cui immagine è contenuta in una sfera di raggio r . Dimostrare che la curvatura della curva nel punto $\alpha(t)$ verifica la disuguaglianza

$$k(t) \geq \frac{1}{r} \quad \forall t \in J$$

Se una curva ha immagine contenuta in una sfera di raggio r , allora è verificata la condizione

$$\frac{1}{k(t)^2} + \frac{k'(t)^2}{\tau(t)^2 k(t)^4} = r^2$$

quindi otteniamo $r^2 \geq 1/k(t)^2$ ovvero la tesi (essendo r e k positive), $\forall t \in J$.

7. Siano α e β due curve, $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definite da

$$\alpha(t) = (t, e^t, t), \quad \beta(t) = \left(\frac{1}{2}(t - \sqrt{3}e^t), \frac{1}{2}(\sqrt{3}t + he^t), t \right)$$

Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, α e β hanno la stessa torsione e la stessa curvatura?

Dall'esercizio 4, la torsione di α è 0 in tutti i punti, $\tau_\alpha(t) = 0, \forall t$. Facendo i conti otteniamo che la torsione di β in $\beta(t)$ è $\tau_\beta(t) = \frac{\beta' \wedge \beta'' \cdot \beta'''}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2} = 0$. Quindi le due curve hanno la stessa torsione in tutti i punti. Allora esse hanno la stessa curvatura se e solo se sono congruenti, cioè se e solo se esiste un'isometria di \mathbb{R}^3 che manda l'una nell'altra.

Osserviamo che

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t - \sqrt{3}e^t) \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}t + he^t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ e^t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha(t)$$

Quindi, affinché α e β siano congruenti, occorre che la matrice A trovata sopra rappresenti la congruenza, quindi α e β hanno la stessa curvatura se e solo se le colonne di A hanno norma 1 e $\det A = \pm 1$.

La prima e la terza colonna hanno norma 1, la seconda ha norma $\sqrt{\frac{3+h^2}{4}}$, quindi $h = \pm 1$; $\det A = \frac{h+3}{4}$. Quindi l'unica soluzione è $h = 1$.

Quarta lezione

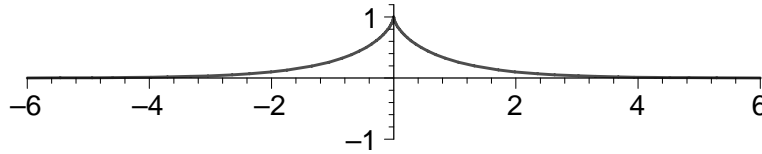
3 Curve piane

1. la trattrice

È la curva piana $\alpha(t)$ tale che il segmento sulla retta tangente ad α in $\alpha(t)$ tra il punto $\alpha(t)$ e l'intersezione della retta con l'asse delle x è costantemente uguale a 1 al variare di t in $(0, \pi)$.

Con tali condizioni si trova come rappresentazione parametrica della curva l'espressione

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \left(\cos t + \log \tan \left(\frac{t}{2} \right), \sin t \right), \quad t \in (0, \pi)$$



Calcoliamone la base di Frenet e la curvatura.

Il *versore tangente* alla curva nel punto $\alpha(t)$ è

$$\vec{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\sin t}{|\cos t|} \left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}, \cos t \right)$$

Osserviamo che $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ se e solo se $t \neq \frac{\pi}{2}$, perciò la curva è regolare in tutti i punti del dominio diversi da $\frac{\pi}{2}$.

Il *versore normale* alla curva nel punto $\alpha(t)$ è

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} (-\alpha_2'(t), \alpha_1'(t)) = \frac{\sin t}{|\cos t|} \left(-\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right)$$

La *curvatura* è data da

$$k(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot \vec{n}(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} = \frac{\sin t}{|\cos t|} > 0$$

Troviamo ora l'evoluta e le involute della trattrice:

L'*evoluta* è la curva descritta dai centri di curvatura nei punti a curvatura non nulla e pertanto ha equazione

$$c(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{n}(t) = \left(\log \tan \left(\frac{t}{2} \right), \frac{1}{\sin t} \right), \quad t \in (0, \pi)$$

quindi l'evoluta della trattrice è una catenaria essendo $y = \cosh x$;

le *involute* (o evolventi) hanno equazione

$$I(t) = \alpha(t) + (c - s(t)) \vec{t}(t), \quad c \in \mathbb{R}$$

dove $s(t)$ è il parametro d'arco in funzione del parametro (in generale a velocità non unitaria) t .

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \frac{|\cos u|}{\sin u} du = \begin{cases} \log \sin t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -\log \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

perciò, al variare della costante $c \in \mathbb{R}$, le involute per $0 < t < \frac{\pi}{2}$ hanno equazione

$$I(t) = \left(\cos t + \log \tan \left(\frac{t}{2} \right) + (c - \log \sin t) \frac{\sin t}{|\cos t|} \left(-\sin t + \frac{1}{\sin t} \right), \sin t + (c - \log \sin t) \frac{\sin t}{|\cos t|} \cos t \right)$$

mentre per $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ hanno equazione

$$I(t) = \left(\cos t + \log \tan \left(\frac{t}{2} \right) + (c + \log \sin t) \frac{\sin t}{|\cos t|} \left(-\sin t + \frac{1}{\sin t} \right), \sin t + (c + \log \sin t) \frac{\sin t}{|\cos t|} \cos t \right)$$

2. Determinare la curvatura e l'espressione della lunghezza d'arco di una curva piana data in coordinate polari $\rho = \rho(\theta)$.

Le coordinate cartesiane di un punto sulla curva sono date da

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

quindi il *versore tangente* alla curva nel punto $(x(\theta), y(\theta))$ è

$$\vec{t}(\theta) = \frac{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta, \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta)}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$$

e il *versore normale* è

$$\vec{n}(\theta) = \frac{(-\rho' \sin \theta - \rho \cos \theta, \rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$$

la derivata seconda è

$$\alpha''(\theta) = (\rho'' \cos \theta - 2\rho' \sin \theta - \rho \cos \theta, \rho'' \sin \theta + 2\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)$$

pertanto la *curvatura* risulta

$$k(\theta) = \frac{2\rho'^2 + \rho^2 - \rho\rho''}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

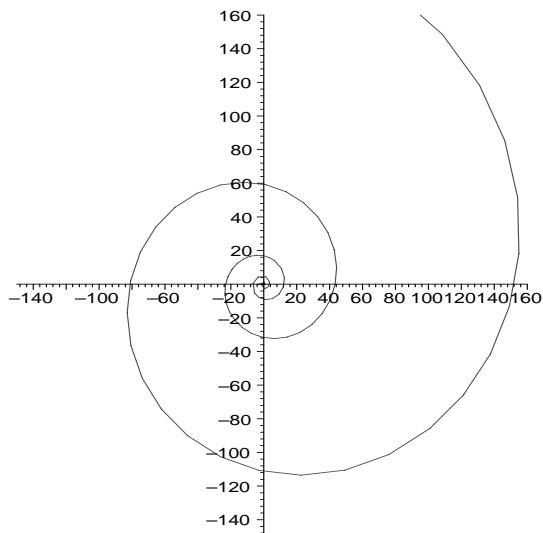
e la *lunghezza d'arco* tra due punti a e b , $a < b$,

$$\int_a^b \|\alpha'(\theta)\| d\theta = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta$$

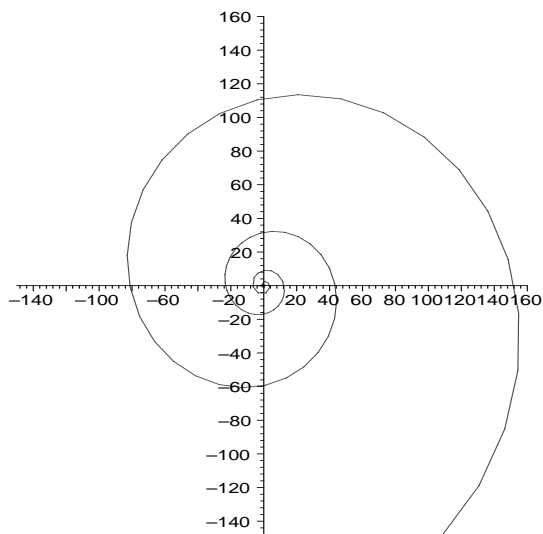
3. la spirale logaritmica

È la curva piana data in coordinate polari dall'equazione $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$, $a > 0, b \neq 0$, al variare di $\theta \in \mathbb{R}$.

se il termine $b > 0$ la spirale è del tipo seguente



se il termine $b < 0$ la spirale è del tipo seguente



Consideriamo la spirale logaritmica di equazione $\rho = e^{b\theta}$, $b > 0$.
Le coordinate cartesiane sono

$$\begin{cases} x = e^{b\theta} \cos \theta \\ y = e^{b\theta} \sin \theta \end{cases}$$

- Verifichiamo che l'evoluta è ancora una spirale logaritmica:
il versore tangente alla curva in $(x(\theta), y(\theta))$ è

$$\begin{aligned}\vec{t}'(\theta) &= \frac{1}{e^{b\theta}\sqrt{1+b^2}} (be^{b\theta}\cos\theta - e^{b\theta}\sin\theta, be^{b\theta}\sin\theta + e^{b\theta}\cos\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} (b\cos\theta - \sin\theta, b\sin\theta + \cos\theta)\end{aligned}$$

di conseguenza il versore normale è

$$\vec{n}'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} (-b\sin\theta - \cos\theta, b\cos\theta - \sin\theta)$$

Poiché $\rho' = be^{b\theta}$, $\rho'' = b^2e^{b\theta}$, dall'espressione trovata precedentemente per la curvatura di una curva piana data in coordinate polari, otteniamo

$$k(\theta) = \frac{2b^2e^{2b\theta} + e^{2b\theta} - b^2e^{2b\theta}}{(b^2e^{2b\theta} + e^{2b\theta})^{3/2}} = \frac{1}{e^{b\theta}\sqrt{1+b^2}} > 0$$

Quindi l'evoluta ha componenti

$$\begin{aligned}c(\theta) &= \left(-be^{b\theta}\sin\theta, be^{b\theta}\cos\theta \right) \\ &= \left(be^{-b\frac{\pi}{2}}e^{b(\theta+\frac{\pi}{2})}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), be^{-b\frac{\pi}{2}}e^{b(\theta+\frac{\pi}{2})}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \right)\end{aligned}$$

Vediamo quindi che l'evoluta ha equazione polare

$$\rho(\theta) = be^{-b\frac{\pi}{2}}e^{b(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

ed è perciò una spirale logaritmica.

Calcolare per esercizio le involute.

- Osserviamo ora che la lunghezza d'arco tra $\theta = -\infty$ e $\theta = t_0$ è finita, infatti essa è

$$\begin{aligned}\lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^{t_0} \|\alpha'(\theta)\| d\theta &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^{t_0} e^{b\theta}\sqrt{1+b^2} d\theta \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} (e^{bt_0} - e^{bt_1}) \\ &= \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} e^{bt_0} < \infty\end{aligned}$$

Se consideriamo una spirale $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$, $a > 0$, $b < 0$, allora è finita la lunghezza dell'arco tra $\theta = t_0$ e $\theta = +\infty$.

4. Determinare le curve che incontrano le rette di un fascio di rette per un punto formando un angolo costante.

Usiamo coordinate polari con polo nel centro O del fascio.

Se O ha coordinate (o_1, o_2) , un punto P sulla curva è individuato dalle coordinate cartesiane $P = (o_1 + \rho(\theta) \cos \theta, o_2 + \rho(\theta) \sin \theta)$.

Sia α l'angolo che la curva forma in P con la retta del fascio per P . Poiché α è costante, sia $\cos \alpha$ che $\sin \alpha$ lo sono, di conseguenza $\cot \alpha =: m$ è costante. Abbiamo che

$$\cos \alpha = \frac{(P - O) \cdot \vec{t}'(\theta)}{\|P - O\| \|\vec{t}'(\theta)\|} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$$

e, se supponiamo ad esempio di considerare l'angolo $\alpha \leq \pi/2$,

$$\sin \alpha = \frac{\|(P - O) \wedge \vec{t}'(\theta)\|}{\|P - O\| \|\vec{t}'(\theta)\|} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$$

Quindi

$$\cot \alpha = m = \frac{\rho'}{\rho}$$

da cui integrando entrambi i membri in $d\theta$ si ottiene

$$m\theta + c = \log \rho \quad \iff \quad \rho = e^{m\theta} e^c$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Possiamo quindi concludere che

se $m \neq 0$ allora la curva è una spirale logaritmica che si "avvolge" su O ,

se $m = 0$ (ovvero $\alpha = \pi/2$) allora la curva è una circonferenza di centro O e raggio e^c .

5. Verificare che per una catenaria "l'area" è proporzionale all'arco corrispondente.

I punti (x, y) di una catenaria soddisfano una relazione del tipo $y = a \cosh(\frac{x}{a})$, $a > 0$, per cui si tratta di un grafico di funzione e ha senso parlare di area intesa come misura del sottografico (in particolare, essendo tutta positiva, non ci sono problemi di segno).

L'area tra due punti x_0 e x_1 è

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \int_{x_0}^{x_1} a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

mentre, essendo la curva espressa dalle equazioni parametriche

$$\alpha(x) : \begin{cases} x = x \\ y = \cosh(\frac{x}{a}) \end{cases}$$

la lunghezza dell'arco sulla curva tra x_0 e x_1 è

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \|\alpha'(x)\| dx &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2} \left(\frac{e^{\frac{x}{a}}}{a} - \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{a}\right)\right)^2} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx\end{aligned}$$

In questo caso abbiamo addirittura che le funzioni integrande sono l'una multiplo dell'altra.

Quinta lezione

4 Superfici

Generalità:

una *superficie riemanniana* S è una superficie differenziabile dotata di una metrica riemanniana, cioè è definito un prodotto scalare su ogni spazio tangente $T_x S$ in modo che in ogni carta locale gli elementi della matrice che lo definisce sono funzioni differenziabili, $\forall x \in S$;

le superfici di cui ci occuperemo sono superfici immerse di \mathbb{R}^3 , per le quali cioè esiste un embedding $F : S' \rightarrow \mathbb{R}^3$, con S' superficie differenziabile, $F(S') = S$ (tali superfici risultano essere riemanniane prendendo come prodotto scalare su $T_x S$ quello indotto da \mathbb{R}^3);

la *prima forma fondamentale* I su $T_p S$, dove S è una superficie immersa, è una forma bilineare simmetrica definita positiva ed è esattamente quella indotta dal prodotto scalare standard di \mathbb{R}^3 sul sottospazio $T_p S$;

una *superficie elementare* S è l'immagine di un embedding da un aperto U di \mathbb{R}^2 , $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, equivalentemente si ha una parametrizzazione (i.e. un diffeomorfismo sull'immagine) di \mathbb{R}^3 , tale superficie è caratterizzata dall'aver un atlante differenziabile costituito da una sola carta data da $\{(S, \varphi^{-1})\}$, per essa la matrice associata alla prima forma fondamentale nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ di $T_p S$ è

$$G = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}$$

tramite l'isomorfismo $d_{(u,v)}\varphi : T_{(u,v)}U \rightarrow T_{\varphi(u,v)}S$, la prima forma fondamentale su $T_{\varphi(u,v)}S$ induce una forma quadratica su $T_{(u,v)}U$ (che indichiamo ancora con I) definita da

$$I(\alpha, \beta) := I(d_{(u,v)}\varphi(\alpha, \beta)) = I(\alpha\varphi_u + \beta\varphi_v)$$

per ogni $(\alpha, \beta) \in T_{(u,v)}U$ nella base $\{(\frac{\partial}{\partial u})_{(u,v)}, (\frac{\partial}{\partial v})_{(u,v)}\}$.

★ Ogni sottovarietà di \mathbb{R}^n possiede una metrica riemanniana indotta dalla metrica standard $\sum_1^n \alpha_i^2$ di \mathbb{R}^n .

Ogni varietà riemanniana compatta (risp. non compatta) di dimensione n è isometrica a una sottovarietà di $\mathbb{R}^{n(3n+1)/2}$ (risp. $\mathbb{R}^{n(3n+1)(n+1)/2}$) (J.Nash, 1956).

4.1 Prima forma fondamentale, lunghezza di curve, angoli tra vettori, isometrie

1. Consideriamo

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, x^2+y^2-1)$$

Essa è l'inversa della proiezione stereografica π_+ dal polo nord della sfera S^2 quindi è una parametrizzazione e l'immagine è $S := S^2 \setminus \{N\}$ (che pertanto è una superficie elementare). Calcoliamo la prima forma fondamentale di S :

$$\varphi_x = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2(1-x^2+y^2), -4xy, 4x) \quad \varphi_y = \frac{1}{1+x^2+y^2}(-4xy, 2(1-y^2+x^2), 4y)$$

$$\varphi_x \cdot \varphi_x = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} = \varphi_y \cdot \varphi_y \quad \varphi_x \cdot \varphi_y = 0$$

quindi la matrice associata a I su $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ è

$$G = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

• verifichiamo che con questa metrica su \mathbb{R}^2 , detta *metrica stereografica*, le semirette di origine O hanno lunghezza π (esse infatti sono le immagini dei semimeridiani): calcoliamo la lunghezza della semiretta $\alpha(t) = \vec{m}t$, $t > 0$, $\vec{m} = (m_1, m_2)$ versore

$$l(\alpha) = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \int_0^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \int_0^{t_1} \sqrt{I(\alpha'(t))} dt$$

$$I(\alpha'(t)) = (m_1 \quad m_2) \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1+t^2)^2}$$

quindi

$$l(\alpha) = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} 2 \arctan t_1 = \pi$$

• verifichiamo che rispetto alla metrica stereografica la lunghezza della circonferenza di raggio r e centro l'origine tende a 0 al tendere del raggio all'infinito (esse sono le immagini dei paralleli):

se la circonferenza è $\beta(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, la sua lunghezza è

$$l(\beta) = \int_0^{2\pi} \|\beta'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{I(\beta'(t))} dt$$

$$I(\beta'(t)) = (-r \sin t \quad r \cos t) \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2}$$

perciò

$$l(\beta) = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1+r^2} dt = \frac{4\pi r}{1+r^2}$$

e $\lim_{r \rightarrow \infty} l(\beta) = 0$.

• dati comunque due vettori $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$, l'angolo che essi formano rispetto alla metrica euclidea uguaglia l'angolo che essi formano rispetto alla metrica stereografica: sia γ l'angolo tra i due vettori, allora, rispetto alla metrica stereografica,

$$\cos \gamma = \frac{I((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))}{\sqrt{I(\alpha_1, \alpha_2)} \sqrt{I(\beta_1, \beta_2)}}$$

$$I((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) = (\alpha_1 \quad \alpha_2) \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)$$

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 \quad \alpha_2) \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$

$$I(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1 \quad \beta_2) \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} (\beta_1^2 + \beta_2^2)$$

quindi risulta

$$\cos \gamma = \frac{(\alpha_1, \alpha_2) \cdot (\beta_1, \beta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$$

Si dice allora che la proiezione stereografica π_+ preserva gli angoli tra vettori.

2. Consideriamo un piano Π , ad esempio quello dato dalle equazioni parametriche

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, 0)$$

che è una parametrizzazione.

Calcoliamo la prima forma fondamentale su $T_{\varphi(u,v)}\Pi$:

$$\varphi_u = (1, 0, 0) \quad \varphi_v = (0, 1, 0)$$

$$\varphi_u \cdot \varphi_u = 1 \quad \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \varphi_v \cdot \varphi_v = 1$$

quindi la matrice associata a I nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ di $T_{\varphi(u,v)}\Pi$ è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

perciò, per ogni $(\alpha, \beta) \in T_{\varphi(u,v)}\Pi$, $I((\alpha, \beta)) = \alpha^2 + \beta^2$.

3. Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (r \cos u, r \sin u, v)$$

una rappresentazione parametrica del cilindro Γ di asse z e raggio r .

φ NON è una parametrizzazione (non è iniettiva), però ristretta opportunamente fornisce una parametrizzazione nell'intorno di un punto di Γ , per ogni punto.

Osservazione:

le u -curve (i.e. le immagini dei punti (u, v_0) al variare di u per un v_0 fissato) sono date da $\varphi(u, v_0) = (r \cos u, r \sin u, v_0)$, sono quindi archi di circonferenze su piani paralleli;

le v -curve (i.e. le immagini dei punti (u_0, v) al variare di v per un u_0 fissato) sono date da $\varphi(u_0, v) = (r \cos u_0, r \sin u_0, v)$, sono quindi rette parallele all'asse z ;

poiché in ogni punto la u -curva è ortogonale alla v -curva passanti per il punto, vediamo che $\varphi_u \cdot \varphi_v = 0$.

Calcoliamo la prima forma fondamentale su $T_{\varphi(u,v)}\Gamma$:

$$\varphi_u = (-r \sin u, r \cos u, 0) \quad \varphi_v = (0, 0, 1)$$

$$\varphi_u \cdot \varphi_u = r^2 \quad \varphi_v \cdot \varphi_v = 1$$

e quindi la matrice associata a I nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ di $T_{\varphi(u,v)}\Gamma$ è

$$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

perciò, per ogni $(\alpha, \beta) \in T_{\varphi(u,v)}\Gamma$, $I((\alpha, \beta)) = r^2\alpha^2 + \beta^2$.

Riparametrizziamo ora Γ ponendo $u = r^{-1}w$ per cui avremo

$$\psi(w, v) = (r \cos(r^{-1}w), r \sin(r^{-1}w), v)$$

In questa nuova parametrizzazione

$$\psi_w = (-\sin(r^{-1}w), \cos(r^{-1}w), 0) \quad \psi_v = (0, 0, 1)$$

$$\psi_w \cdot \psi_w = 1 \quad \psi_w \cdot \psi_v = 0 \quad \psi_v \cdot \psi_v = 1$$

cioè la matrice associata a I nella base $\{\psi_w, \psi_v\}$ di $T_{\psi(w,v)}\Gamma$ è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da qui deduciamo che il cilindro e il piano sono *localmente isometrici* perchè per ogni punto del cilindro esiste un diffeomorfismo (una restrizione opportuna della riparametrizzazione) di un intorno del punto su un aperto del piano e questo diffeomorfismo è un'isometria.

Sesta lezione

4.2 Seconda forma fondamentale, curvature, tipo di punti

Generalità:

se S è una superficie elementare di \mathbb{R}^3 parametrizzata da $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove $U \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto e $\varphi(U) = S$, si definisce la mappa di Gauss

$$\gamma : S \rightarrow S^2 : x \rightarrow N(x) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

e il suo differenziale in un punto $x = \varphi(u, v) \in S$ è un endomorfismo di $T_x S$

$$d_x \gamma : T_x S \rightarrow T_{\varphi(x)} S^2 = N(x)^\perp = T_x S$$

L'operatore forma di S in x è $L := -d_x \gamma$.

La seconda forma fondamentale II su $T_x S$ è una forma bilineare simmetrica definita da

$$II(v, w) := I(L(v), w) \quad \forall v, w \in T_x S$$

Se come base di $T_x S$ prendiamo $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, II in forma matriciale è definita da

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cdot \varphi_{uu} & N \cdot \varphi_{uv} \\ N \cdot \varphi_{vu} & N \cdot \varphi_{vv} \end{pmatrix}$$

Dall'essere $B = G X$, risulta in forma matriciale che

$$X = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

1. Consideriamo il piano $\Pi = \varphi(\mathbb{R}^2)$ di equazioni parametriche

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, 0)$$

- Calcoliamo la seconda forma fondamentale su Π nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ di $T_p \Pi$, $p = \varphi(u, v) \in \Pi$.

$$\varphi_u = (1, 0, 0) \quad \varphi_v = (0, 1, 0)$$

$$\varphi_{uu} = \varphi_{uv} = \varphi_{vu} = \varphi_{vv} = (0, 0, 0)$$

Quindi la matrice associata alla seconda forma fondamentale su Π nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ di $T_p \Pi$ è

$$B = \begin{pmatrix} N \cdot \varphi_{uu} & N \cdot \varphi_{uv} \\ N \cdot \varphi_{vu} & N \cdot \varphi_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice associata all'operatore forma $L = -d_p\gamma : T_p\Pi \rightarrow T_p\Pi$ (L in realtà è L_p) nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ è $X = G^{-1}B$, G essendo quella della prima forma fondamentale, otteniamo $L = 0$, cioè l'operatore forma è nullo su tutti i vettori di $T_p\Pi$, $\forall p \in \Pi$.

Di conseguenza ogni punto p è *piatto* (o planare), la curvatura gaussiana $K(p) = \det X = 0$ in tutti i punti p di Π , le curvature principali di Π in p (gli autovalori di X) sono $k_1 = k_2 = 0$, cioè le curvature normali di Π in un punto p lungo una direzione $\langle e \rangle$, $e \in T_p\Pi$, $\|e\| = 1$ sono costantemente 0, in particolare ogni punto di Π è *ombelicale*. Ogni direzione di $T_p\Pi$ è principale e la curvatura media $H(p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$, $\forall p \in \Pi$, ovvero Π è una superficie minima.

2. Sia Γ il cilindro dato dalle equazioni parametriche

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (r \cos u, r \sin u, v)$$

Abbiamo visto che, ristretta opportunamente, φ fornisce una parametrizzazione di Γ e la matrice associata alla prima forma fondamentale su Γ nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ di $T_p\Gamma$, $p \in \Gamma$ è

$$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• calcoliamo la seconda forma fondamentale II e le curvature:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (-r \sin u, r \cos u, 0) & \varphi_v &= (0, 0, 1) \\ \varphi_{uu} &= (-r \cos u, -r \sin u, 0) & \varphi_{uv} &= \varphi_{vu} = (0, 0, 0) \\ \varphi_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

e quindi il versore normale alla superficie Γ in p risulta

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

e la matrice associata a II su Γ è

$$B = \begin{pmatrix} N \cdot \varphi_{uu} & N \cdot \varphi_{uv} \\ N \cdot \varphi_{vu} & N \cdot \varphi_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertanto la matrice associata all'operatore forma $L : T_p\Gamma \rightarrow T_p\Gamma$ è

$$X = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo X già in forma diagonale, le curvature principali sono $k_1 = -\frac{1}{r}$ e $k_2 = 0$, rispettivamente la curvatura normale di Γ in p minima e massima lungo le direzioni di $T_p\Gamma$. Le direzioni principali corrispondenti sono gli autospazi relativi, ovvero, la prima è data da $\varphi_u/\|\varphi_u\| = (\sin u, \cos u, 0)$, la seconda è $\varphi_v = (0, 0, 1)$.

La curvatura gaussiana di Γ in p è $K(p) = \det X = k_1 k_2 = 0$, essendo $L \neq 0$ tutti i punti di Γ sono *parabolici*. La curvatura media è $H(p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -1/2r$.

Osservazione:

piano	cilindro
$K = 0$	$K = 0$
$L = 0$	$L \neq 0$
$H = 0$	$H \neq 0$

Poiché il piano e il cilindro sono localmente isometrici, vediamo che, ad esempio, l'operatore forma e la curvatura media non sono *nozioni intrinseche*, esse infatti non vengono preservate per isometria; mentre sappiamo dal teorema Egregium che la curvatura gaussiana è invariante per isometria.

3. la pseudosfera

Consideriamo la superficie S di rotazione ottenuta facendo ruotare la trattrice sul piano Oxy attorno all'asse x :

la trattrice in questione ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in (0, \pi)$$

I punti sulla pseudosfera S hanno coordinate parametriche $\varphi(t, \theta) = (x(t, \theta), y(t, \theta), z(t, \theta))$, con $t \in (0, \pi)$, $\theta \in \mathbb{R}$, date da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \\ \sin t \cos \theta \\ \sin t \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t, \theta) \\ y(t, \theta) \\ z(t, \theta) \end{pmatrix}$$

Questa rappresentazione parametrica non è una parametrizzazione di S , però per ogni punto di S esiste una restrizione di φ su un opportuno aperto di $(0, \pi) \times \mathbb{R}$ che è una parametrizzazione di S in un intorno del punto.

- Calcoliamo la prima e la seconda forma fondamentale su S e le curvatures.

$$\varphi_t = \left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}, \cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta\right) \quad \varphi_\theta = (0, -\sin t \sin \theta, \sin t \cos \theta)$$

$$\varphi_t \cdot \varphi_t = \cot^2 t \quad \varphi_\theta \cdot \varphi_\theta = \sin^2 t \quad \varphi_t \cdot \varphi_\theta = 0$$

quindi la matrice associata alla prima forma fondamentale su S nella base $\{\varphi_t, \varphi_\theta\}$ di $T_p S$ è

$$G = \begin{pmatrix} \cot^2 t & 0 \\ 0 & \sin^2 t \end{pmatrix}$$

inoltre

$$\varphi_{tt} = \left(-\cos t - \frac{\cos t}{\sin^2 t}, -\sin t \cos \theta, -\sin t \sin \theta\right) \quad \varphi_{\theta\theta} = (0, -\sin t \cos \theta, -\sin t \sin \theta)$$

$$\varphi_{t\theta} = (0, -\cos t \sin \theta, \cos t \cos \theta) \quad N = \frac{(\sin t \cos t, -\cos \theta \cos^2 t, -\sin \theta \cos^2 t)}{|\cos t|}$$

da cui otteniamo che la matrice associata alla seconda forma fondamentale su S nella base $\{\varphi_t, \varphi_\theta\}$ di $T_p S$ è

$$B = \begin{pmatrix} -|\cot t| & 0 \\ 0 & \sin t |\cos t| \end{pmatrix}$$

Da G e B deduciamo la matrice associata all'operatore forma $L : T_p S \rightarrow T_p S$

$$X = \begin{pmatrix} -|\tan t| & 0 \\ 0 & |\cot t| \end{pmatrix}$$

Deduciamo quindi le curvatures principali $k_1 = -|\tan t|$ e $k_2 = |\cot t|$, la curvatura gaussiana $K = \det X = -1$ e la curvatura media $H = 1/2[(1 - 2 \sin^2 t)/(\sin t |\cos t|)]$.

La direzione principale relativa a k_1 è quella di $\varphi_t/|\varphi_t|$, quella di k_2 è $\varphi_\theta/|\varphi_\theta|$. Ogni punto di S è iperbolico perché $K < 0$.

Dal teorema Egregium possiamo affermare che la pseudosfera non è isometrica alla sfera.

4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie immersa. Provare che se esiste un piano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tangente ad S in tutti i punti del supporto C di una curva regolare allora la curvatura gaussiana di S è 0 in tutti i punti di C .

Sia $p \in C \subset S$. Scegliamo una parametrizzazione α di C e una parametrizzazione φ di S in un intorno di p .

Il piano Π è il piano tangente a S in p , $\forall p \in C$ e quindi il versore normale a S in p è costante lungo tutti i punti di C perché è l'ortogonale al piano Π .

Quindi, se γ indica la mappa di Gauss,

$$\gamma : S \rightarrow S^2 : x \rightarrow N(x)$$

abbiamo che $\gamma|_C$ è costante, $N(p) = N$, $\forall p = \alpha(t) \in C$, e di conseguenza

$$d_{\alpha(t)}\gamma(v) = 0 \quad \forall v \in T_{\alpha(t)}C = \left\langle \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle$$

notiamo che essendo la curva C regolare, il versore tangente alla curva in un suo punto $\alpha(t)$ è definito.

Quindi il differenziale della mappa di Gauss in un punto di C

$$d_{\alpha(t)}\gamma : T_{\alpha(t)}S \rightarrow T_{\alpha(t)}S^2$$

non è iniettivo poiché si annulla su $\alpha'(t) \neq 0$.

Perciò, essendo l'operatore forma (nel punto $\alpha(t)$) $L = -d_{\alpha(t)}\gamma$, per la curvatura gaussiana nei punti $p = \alpha(t) \in C$ otteniamo

$$K(p) = \det X = \det d_p\gamma = 0$$

perciò i punti della superficie S saranno piatti o parabolici, a seconda che si annulli o no l'operatore forma L corrispondente.

Settima lezione

4.3 Geodetiche, linee di curvatura, linee asintotiche, rigate sviluppabili

★ una curva regolare su una superficie regolare è una *geodetica* se il vettore curvatura geodetica della curva è nullo in ogni punto, equivalentemente se $\vec{n} = \pm N$, dove \vec{n} è il versore normale della curva, N il versore normale alla superficie, calcolati nello stesso punto.

★ una curva su una superficie è una *linea di curvatura* se in ogni punto è tangente a una direzione principale per il punto.

1. Vediamo che in una superficie di rotazione i meridiani sono geodetiche, troviamo quali paralleli sono geodetiche e infine proviamo che meridiani e paralleli sono linee di curvatura.

Sia $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva contenuta nel piano $y = 0$ di equazione $x = f(u), z = u$, $f > 0$. Consideriamo la superficie S ottenuta facendo ruotare tale curva attorno all'asse z .

Allora la superficie è data dalle equazioni

$$\varphi(u, \theta) = (f(u) \cos \theta, f(u) \sin \theta, u)$$

che, opportunamente ristrette, forniscono una parametrizzazione di un intorno di un punto di S .

Troviamo il versore normale alla superficie in un suo punto:

$$\varphi_u = (f'(u) \cos \theta, f'(u) \sin \theta, 1) \quad \varphi_\theta = (-f(u) \sin \theta, f(u) \cos \theta, 0)$$

$$N(u, \theta) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_\theta}{\|\varphi_u \wedge \varphi_\theta\|} = \frac{(-\cos \theta, -\sin \theta, f'(u))}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}$$

Ogni meridiano di S è dato da

$$\alpha(u) : \begin{cases} x = f(u) \cos \theta_0 \\ y = f(u) \sin \theta_0 \\ z = u \end{cases}$$

per un determinato valore di θ_0 . Calcoliamo il versore normale a α in un suo punto:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{(f'(u) \cos \theta_0, f'(u) \sin \theta_0, 1)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}} \\ \vec{B} &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} = \frac{(-f''(u) \sin \theta_0, f''(u) \cos \theta_0, 0)}{\sqrt{f''(u)^2}} \\ \vec{n} &= \vec{B} \wedge \vec{T} = \operatorname{sgn}(f''(u)) \frac{(\cos \theta_0, \sin \theta_0, -f'(u))}{\sqrt{1 + f'(u)^2}} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che $\vec{n}(u) = \pm \vec{N}(u, \theta_0)$ e perciò

- i meridiani di una superficie di rotazione sono geodetiche.

Ogni parallelo di S è dato da

$$\beta(\theta) : \begin{cases} x = f(u_0) \cos \theta \\ y = f(u_0) \sin \theta \\ z = u_0 \end{cases}$$

per un determinato valore di u_0 . Calcoliamo il versore normale a β in un suo punto:

$$\vec{T} = \frac{\beta'}{\|\beta'\|} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad \vec{B} = \frac{\beta' \wedge \beta''}{\|\beta' \wedge \beta''\|} = (0, 0, 1)$$

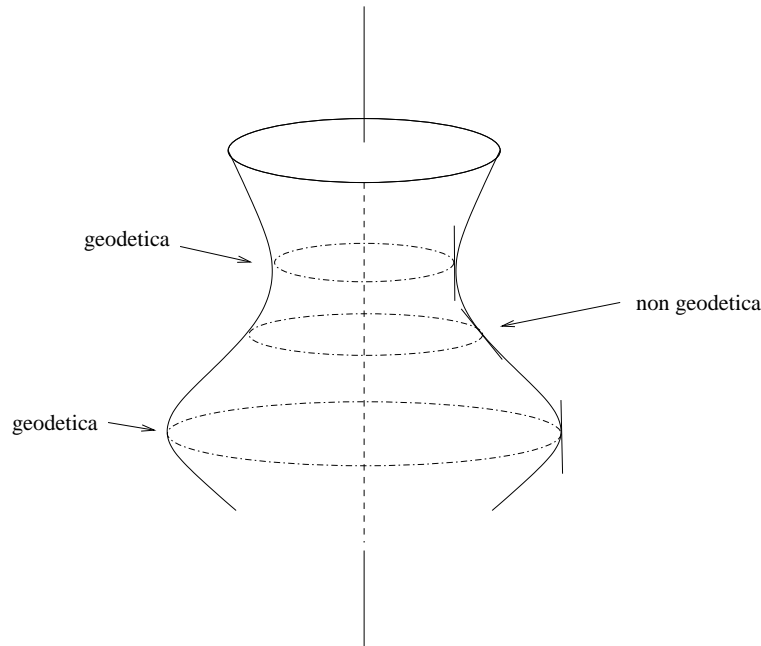
$$\vec{n} = \vec{B} \wedge \vec{T} = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$$

Vediamo che in generale non si ha $\vec{n}(\theta) = \pm \vec{N}(u_0, \theta)$, però, se $f'(u_0) = 0$ cioè si verifica e

$$f'(u_0) = 0 \iff \vec{t}_\gamma(u_0) = (f'(u_0), 0, 1) = (0, 0, 1)$$

quindi

- condizione necessaria e sufficiente affinché un parallelo su una superficie di rotazione sia una geodetica è che tale parallelo sia generato dalla rotazione di un punto della curva generatrice dove la tangente è parallela all'asse di rotazione.



Per vedere che i meridiani e i paralleli sono linee di curvatura, dobbiamo verificare che in ogni punto sono tangenti a una direzione principale.

$$\varphi_u \cdot \varphi_u = 1 + f'(u)^2 \quad \varphi_\theta \cdot \varphi_\theta = f(u)^2 \quad \varphi_u \cdot \varphi_\theta = 0$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= (f''(u) \cos \theta, f''(u) \sin \theta, 0) \\
\varphi_{\theta\theta} &= (-f(u) \cos \theta, -f(u) \sin \theta, 0) \\
\varphi_{u\theta} &= (-f'(u) \sin \theta, f'(u) \cos \theta, 0) \\
N \cdot \varphi_{uu} &= -\frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}} \quad N \cdot \varphi_{\theta\theta} = \frac{f(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}} \quad N \cdot \varphi_{u\theta} = 0
\end{aligned}$$

quindi la matrice associata all'operatore forma L nella base $\{\varphi_u, \varphi_\theta\}$ di $T_{\varphi(u,\theta)}S$ è

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{f(u)^2(1+f'(u)^2)} \begin{pmatrix} f(u)^2 & 0 \\ 0 & 1+f'(u)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{f(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{f''(u)}{(1+f'(u)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(u)\sqrt{1+f'(u)^2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

perciò i due valori sulla diagonale principale sono le curvatura principali e le direzioni principali sono

$$\frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|} = \frac{(f'(u) \cos \theta, f'(u) \sin \theta, 1)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$$

e

$$\frac{\varphi_\theta}{\|\varphi_\theta\|} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

Vediamo che la prima è il versore tangente al meridiano, la seconda è il versore tangente al parallelo, nei punti opportuni.

2. Sia α una curva, parametrizzata in lunghezza d'arco s , su una superficie Σ (orientata). Se α è sia una linea di curvatura che una geodetica allora α è piana.

Supponiamo di avere una parametrizzazione (locale) di Σ , sia L l'operatore forma e α sia tangente alla direzione principale corrispondente alla curvatura principale k_1 . Allora per ipotesi si ha che $L(\vec{t}) = \pm k_1 \vec{t}$ e $\vec{n} = \pm N$.

Dalla prima formula di Frenet otteniamo

$$-k \vec{t} + \tau \vec{b} = \frac{d\vec{n}}{ds} = \pm \frac{dN}{ds} = \pm d_{\alpha(s)}\gamma(\vec{t}) = \mp L(\vec{t}) = \mp k_1 \vec{t}$$

essendo γ la mappa di Gauss su Σ . Deduciamo che $\tau = 0$ e quindi la curva è piana.

3. Siano $C = \alpha(\mathbb{R})$ con $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \theta \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta, \theta)$
e $S = \varphi(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ con $\varphi : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\beta, t) \rightarrow (t \cos \beta, t \sin \beta, 1 + b - t)$.
i) verificare che $C \subset S$;
ii) calcolare la curvatura normale e il vettore curvatura geodetica di α e quindi dedurre se α è o no una geodetica.

i) basta prendere $\beta = \theta, t = 1$.

ii) $\alpha' = (-\sin \theta, \cos \theta, 1)$, $\|\alpha'\| = \sqrt{2}$, riparametrizziamo α in parametro d'arco

$$s(\theta) = \int_0^\theta \|\alpha'(u)\| du = \sqrt{2}\theta \implies \theta = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Sia dunque $\gamma(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ la riparametrizzazione.

Allora

$$\gamma'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

quindi

$$\vec{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

e la curvatura della curva è

$$k(s) = \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\| = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2}$$

inoltre

$$\varphi_\beta = (-t \sin \beta, t \cos \beta, 1) \quad \varphi_t = (\cos \beta, \sin \beta, -1)$$

$$N = \frac{(-t \cos \beta - \sin \beta, -t \sin \beta + \cos \beta, -t)}{\sqrt{1 + 2t^2}}$$

Per definizione $k \vec{n} = k_n N + \vec{k}_g$ dunque la curvatura normale è

$$k_n = k \vec{n} \cdot N\left(\frac{s}{\sqrt{2}}, 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

e quindi il vettore curvatura geodetica risulta

$$\vec{k}_g = k \vec{n} - k_n N = \frac{1}{6} \left(-2 \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -2 \sin \frac{s}{\sqrt{2}} - \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

Poiché $\vec{k}_g \neq (0, 0, 0)$, la curva non è una geodetica della superficie.

4. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, \theta) \rightarrow (u \cos \theta, u \sin \theta, u^2)$.

i) determinare gli insiemi $A \subset \mathbb{R}^2$ massimali rispetto alle seguenti proprietà:

(a) A è prodotto di due intervalli

(b) $\varphi(A)$ è una superficie e $\varphi|_A$ è una parametrizzazione di $\varphi(A)$

ii) $S = \varphi(\mathbb{R}^2) = \{(x, y, x^2 + y^2)\}$ e determinare curvatura gaussiana, curvature principali, linee di curvatura e linee asintotiche di S .

i) Supponiamo che A sia un insieme che verifichi le proprietà (a) e (b).

Poiché $\varphi(u, \theta) = \varphi(u, \theta + 2\pi)$ si dovrà avere

$$A \subseteq \mathbb{R} \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \quad \theta_0 \in \mathbb{R}$$

Affinché $\varphi|_A$ sia una parametrizzazione della superficie $\varphi(A)$, occorre che $\varphi_u \wedge \varphi_\theta \neq (0, 0, 0)$ in tutti i punti di $\varphi(A)$ ovvero $rk(d_{(u,\theta)}\varphi) = 2$ per ogni $(u, \theta) \in A$. La matrice associata a $d_{(u,\theta)}\varphi|_A$ è

$$J(\varphi|_A)(u, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta u \\ \sin \theta & \cos \theta u \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo rango è 2 se e solo se $u \neq 0$, quindi A non può intersecare la retta $u = 0$, di conseguenza

$$A \subseteq (-\infty, 0) \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$$

oppure

$$A \subseteq (0, \infty) \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$$

Viceversa, si vede che, fissato un valore θ_0 , i due insiemi $(-\infty, 0) \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ e $(0, \infty) \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ verificano le condizioni (a) e (b) quindi essi sono gli insiemi cercati.

ii) Banalmente si vede che $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ è il grafico della funzione $(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ e perciò S è una superficie (orientabile). Per determinare le quantità richieste utilizziamo φ anche se essa non è una buona parametrizzazione in $(0, 0, 0)$, le formule che otterremo le estenderemo per continuità all'origine.

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cos \theta, \sin \theta, 2u) & \varphi_\theta &= (-u \sin \theta, u \cos \theta, 0) \\ \varphi_u \cdot \varphi_u &= 1 + 4u^2 & \varphi_u \cdot \varphi_\theta &= 0 & \varphi_\theta \cdot \varphi_\theta &= u^2 \end{aligned}$$

quindi la matrice associata alla prima forma fondamentale nella base $\{\varphi_u, \varphi_\theta\}$ di $T_{\varphi(u, \theta)}S$ è

$$G = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

inoltre

$$\varphi_{uu} = (0, 0, 2) \quad \varphi_{u\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad \varphi_{\theta\theta} = (-u \cos \theta, -u \sin \theta, 0)$$

e

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_\theta}{\|\varphi_u \wedge \varphi_\theta\|} = \frac{(-2u^2 \cos \theta, -2u^2 \sin \theta, u)}{\sqrt{4u^4 + u^2}}$$

quindi

$$N \cdot \varphi_{uu} = \frac{2u}{\sqrt{4u^4 + u^2}} \quad N \cdot \varphi_{u\theta} = 0 \quad N \cdot \varphi_{\theta\theta} = \frac{2u^3}{\sqrt{4u^4 + u^2}}$$

e la matrice associata alla seconda forma fondamentale nella base $\{\varphi_u, \varphi_\theta\}$ di $T_{\varphi(u, \theta)}S$ è

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2u}{\sqrt{4u^4 + u^2}} & 0 \\ 0 & \frac{2u^3}{\sqrt{4u^4 + u^2}} \end{pmatrix}$$

L'operatore forma L è dunque dato da

$$X = G^{-1}B = \frac{1}{(u^2(1 + 4u^2))^{3/2}} \begin{pmatrix} 2u^3 & 0 \\ 0 & 2u^3(1 + 4u^2) \end{pmatrix}$$

Troviamo dunque che la curvatura gaussiana è $K = \det X = 4/(1 + 4u^2)^2$, le curvature principali sono $k_1 = 2 \operatorname{sgn}(u)/(1 + 4u^2)^{3/2}$ e $k_2 = 2 \operatorname{sgn}(u)/(1 + 4u^2)^{1/2}$ (X è diagonale!) e le direzioni principali sono rispettivamente $\varphi_u/\|\varphi_u\|$ e $\varphi_\theta/\|\varphi_\theta\|$.

Le linee di curvatura γ sono le curve sulla superficie tangenti in ogni punto a una direzione principale e si trovano con l'equazione

$$x_{21}\gamma_u^2 + (x_{22} - x_{11})\gamma_u\gamma_\theta - x_{12}\gamma_\theta^2 = 0$$

essendo $X = (x_{ij})_{ij}$. Nel nostro caso $x_{21} = x_{12} = 0$ perciò le soluzioni sono $\gamma_u = 0$ e $\gamma_\theta = 0$, cioè, quando X è diagonale, le linee di curvatura sono le linee coordinate ovvero le u -curve ($\varphi(u, \theta_0)$) e le θ -curve ($\varphi(u_0, \theta)$).

Infine le *linee asintotiche* sono le curve sulla superficie tangenti in ogni punto a una direzione asintotica, ovvero a un vettore $v \in T_{\varphi(u, \theta)}S$ tale che $k_n(v) = II(v, v) = 0$. Nel nostro caso k_1 e k_2 hanno lo stesso segno nel punto in cui vengono calcolate $\varphi(u, \theta)$ ed essendo i valori massimo e minimo assunti dalle curvature normali lungo le direzioni di $T_{\varphi(u, \theta)}S$, risulta che la curvatura normale lungo i vettori di $T_{\varphi(u, \theta)}S$ è sempre diversa da zero e quindi non esistono direzioni asintotiche.

5. Consideriamo la superficie rigata

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vw(t)$$

svilupppabile, cioè $w \wedge w' \cdot \alpha' \equiv 0$.

Allora

$$N_v \cdot \varphi_v = N_v \cdot \varphi_t = 0$$

Essendo $N = \varphi_t \wedge \varphi_v / \|\varphi_t \wedge \varphi_v\|$, $N \cdot \varphi_t = 0$ e $N \cdot \varphi_v = 0$. Derivando otteniamo

$$0 = \frac{d}{dv}(N \cdot \varphi_v) = N_v \cdot \varphi_v + N \cdot \varphi_{vv}$$

$$0 = \frac{d}{dv}(N \cdot \varphi_t) = N_v \cdot \varphi_t + N \cdot \varphi_{vt}$$

Essendo $\varphi_v = w(t)$ segue $\varphi_{vv} = 0$ e $\varphi_{vt} = w'(t)$. Dalla prima si ha $N_v \cdot \varphi_v = 0$. Dalla seconda, $N \cdot \varphi_{vt} = N \cdot w'(t)$ e

$$N \cdot w'(t) = \frac{\varphi_t \wedge \varphi_v}{\|\varphi_t \wedge \varphi_v\|} \cdot w'(t) = \frac{(\alpha' + vw') \wedge w \cdot w'}{\|\varphi_t \wedge \varphi_v\|} = \frac{\alpha' \wedge w \cdot w' + vw' \wedge w \cdot w'}{\|\varphi_t \wedge \varphi_v\|} = 0$$

infatti l'ipotesi di svilupppabilità assicura che $\alpha' \wedge w \cdot w' = \alpha' \cdot w \wedge w' = 0$.

5 Esercizi proposti

1. Dimostrare che un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ e che L è un diffeomorfismo se e solo se L è invertibile, cioè $n = m$ e $\det(L) \neq 0$. Dedurre che una traslazione è un diffeomorfismo.
2. Trovare un diffeomorfismo di \mathbb{R}^n sull'aperto $(0, 1)^n$.
3. Dimostrare che l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow D^n \setminus S^{n-1} : x \rightarrow \frac{x}{1+\|x\|}$ è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^1 , mentre $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$ è di classe \mathcal{C}^∞ .
4. Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Vedere che $d_p g = g, \forall p \in \mathbb{R}^n$.
5. Trovare gli eventuali punti di \mathbb{R}^2 dove la mappa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow (\sin x, \sin 2x, y)$ è un'immersione.
6. Siano $n \geq 2$ e $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio in n indeterminate a coefficienti in \mathbb{R} non costante. Sia X il luogo degli zeri di P , cioè $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : P(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. X è detto *ipersuperficie algebrica* di \mathbb{R}^n . Un punto $q \in X$ è detto *singolare* se $\frac{\partial P}{\partial x_i}(q) = 0, \forall i$, altrimenti è non-singolare (o liscio o regolare). X è detta *non-singolare* se ogni suo punto lo è.
Verificare che se X è un'ipersuperficie algebrica non singolare, allora X è una sottovarietà di \mathbb{R}^n . (sugg.: non occorre costruire un atlante)
7. Sia γ la curva data dalla parametrizzazione $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha(t) = (t^2, t - t^2, 2t)$. Verificare che si tratta di una curva differenziabile fortemente regolare, calcolarne terna di Frenet, curvatura, torsione e piano osculatore nel generico punto $\alpha(t)$. Stabilire infine se essa è una curva piana oppure no.
8. Calcolare terna di Frenet, curvatura e torsione nel generico punto della curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove $\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ dopo aver verificato che è una curva fortemente regolare. Determinare inoltre l'equazione cartesiana del piano osculatore alla curva nel generico punto.
9. Sia $\alpha : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(\frac{t}{2}))$. Verificare che α è regolare e che il suo supporto è contenuto sulla sfera di centro O e raggio 2.
10. Data la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\alpha(t) = (t, e^t, t)$, dimostrare che se $t_1 \neq t_2$ allora le rette tangenti alla curva in $\alpha(t_i)$ non sono mai parallele.
11. Considerata la famiglia di curve

$$\gamma_a : \begin{cases} x = (1 - a^2)(t - \cos t) \\ y = (1 - a)(1 - \sin t) \\ z = 1 - t \end{cases}$$

trovare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la curva γ_a è piana.

12. Delle seguenti curve calcolare base di Frenet, curvatura, evoluta e involute:
- (a) la circonferenza di centro l'origine e raggio $a \in \mathbb{R}^+$;
 - (b) l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 - (c) l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 - (d) la spirale di Archimede rappresentata in coordinate polari dall'equazione $\rho = c\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, c costante.
13. Considerata l'ellisse di semiassi a, b , verificare che il rapporto tra le curvature in corrispondenza ai vertici è $(\frac{a}{b})^3$.

14. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u^2, uv^2, v)$$

- i) sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0) : u \leq 0\}$; si provi che la restrizione di φ ad A è una parametrizzazione di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, mostrando che A è un aperto massimale rispetto a tale proprietà.
 - ii) si calcolino prima e seconda forma fondamentale di S e si classifichino i suoi punti come ellittici, parabolici, iperbolici e planari.
 - iii) si descriva l'immagine della mappa di Gauss verificando che essa non è suriettiva.
15. Sia $A = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ e

$$\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, \theta) \rightarrow (3u^2 \cos \theta, 3u^2 \sin \theta, e^{-u})$$

- i) calcolare prima e seconda forma fondamentale di $S = \varphi(A)$.
 - ii) calcolare le curvature principali di S e si discuta il segno della curvatura gaussiana di S ; si dica inoltre se S ha punti ombelicali.
16. Le seguenti quadriche non degeneri sono a punti ellittici:

- (a) ellissoide: $\varphi(u, v) = (a \cos u, b \sin u \cos v, c \sin u \sin v)$, con $U = (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$; verificare che φ è una parametrizzazione dell'ellissoide

$$Q : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la cui immagine è $Q \setminus \{(0, 0, \pm c)\}$. Verificare l'ellitticità dei punti.

- (b) iperboloido ellittico a due falde: $\varphi(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$, con $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u \neq 0\}$, $a, b, c > 0$; è una parametrizzazione di una falda dell'iperboloido ellittico

$$Q : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Verificare l'ellitticità dei punti nel caso $a = b$.

- (c) paraboloido ellittico: $\varphi(u, v) = (a u \cos v, b u \sin v, u^2)$, con $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u > 0\}$, $a, b > 0$; è una parametrizzazione di un aperto del paraboloido ellittico

$$Q : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Verificare l'ellitticità dei punti nel caso $a = b$.

17. Le rimanenti quadriche non degeneri sono a punti iperbolici:

- (a) iperboloido iperbolico: $\varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $a, b, c > 0$; è una parametrizzazione dell'iperboloido iperbolico

$$Q : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Verificare l'iperbolicità dei punti per $a = b$.

- (b) paraboloido iperbolico: $\varphi(u, v) = (a(u+v), b(u-v), 4uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $a, b > 0$; è una parametrizzazione del paraboloido iperbolico

$$Q : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Verificare l'iperbolicità dei punti.

18. Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, \theta) \rightarrow (u^2 \cos \theta, u^2 \sin \theta, u)$$

- i) determinare gli insiemi $A \subset \mathbb{R}^2$ massimali rispetto alle seguenti proprietà:

- (a) A è prodotto di due intervalli;
 (b) $\varphi(A)$ è una superficie e $\varphi|_A$ è una parametrizzazione.

- ii) determinare curvatura gaussiana, curvature principali, direzioni asintotiche e linee di curvatura di $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$

19. Si consideri la mappa

$$\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (u, v, uv(u^2 - v^2)^{-1})$$

dove $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 \neq v^2\}$.

Si provi che φ è una parametrizzazione di $S = \varphi(A)$, si calcolino la prima e la seconda forma fondamentale su S e si verifichi che $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ le curve

$$C_a : (-\pi/4, \pi/4) \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \varphi(a \cos t, a \sin t)$$

sono curve asintotiche per S .

20. Provare che se γ è una geodetica piana e non è una retta allora γ è una linea di curvatura.

21. Data la superficie di Enneper di equazioni

$$\begin{cases} x = u + uv^2 - \frac{u^3}{3} \\ y = v + vu^2 - \frac{v^3}{3} \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

verificare che:

- (a) la superficie è minimale;
- (b) le linee di curvatura sono curve coordinate;
- (c) le curve asintotiche sono $u + v = cost$, $u - v = cost$.

Alcuni siti per curiosità:

★ per la trattrice:

<http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/planimeter/Prytz/Prytz.htm>

★ per la spirale logaritmica:

http://www.mat.dtu.dk/persons/Hansen_Vagn_Lundsgaard/nautilus/naustory.html

<http://www.math.ubc.ca/hoek/Teaching/Golden/Divina.html>

6 Bibliografia essenziale

- De Fabritiis C., Petronio C., *Esercizi svolti e complementi di Topologia e Geometria*, Ed. Bollati Boringhieri, Torino, 1997
- Do Carmo M.P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1976
- Gentili G., Podestà F., Vesentini E., *Lezioni di geometria differenziale*, Ed. Bollati Boringhieri, Torino, 1995
- Sernesi E., *Geometria 2*, Ed. Bollati Boringhieri, Torino, 1994