

Gianluca Occhetta

Note di Geometria

V unità didattica

Università di Trento

Dipartimento di Matematica

Via Sommarive 14

38050 - Povo (TN)

Prefazione

Le presenti note riassumono gli argomenti trattati nel corso di Geometria V unità didattica; come tali non vogliono in alcun modo sostituire i libri di testo e gli appunti, ma essere una guida per ritrovare su di essi gli argomenti svolti; spesso le dimostrazioni sono ridotte all'osso, e gli esempi vengono elencati senza la discussione che ne viene fatta a lezione; inoltre tali note non sono probabilmente esenti da errori e omissioni. Sarò grato a chi me ne segnalerà.

Trento,
Gennaio 2004

Gianluca Occhetta



Indice

Parte I Geometria differenziale

1	Varietà differenziabili	3
1.1	Varietà differenziabili	3
1.2	Funzioni e applicazioni differenziabili	4
1.3	Spazio tangente in un punto	5
1.4	Fibrato tangente	8
1.5	Differenziale di un'applicazione	9
1.6	Immersioni, sommersioni, embedding	10
1.7	Sottovarietà	11
2	Curve differenziabili	13
2.1	Curve regolari - lunghezza d'arco	13
2.2	Il triedro di Frenet	14
2.3	Curvatura e torsione	17
2.4	Forma canonica locale - Enti osculatori	18
2.5	Curve con parametro arbitrario	21
2.6	Curve piane	22
3	Superfici differenziabili	29
3.1	Superfici Riemanniane	29
3.2	Superfici in \mathbb{R}^3 - prima forma fondamentale	32
3.3	Operatore forma e seconda forma fondamentale	37
3.4	Curvatura di Gauss e theorema egregium	40
3.4.1	Tipo di punti di una superficie	40
3.4.2	Interpretazione geometrica della curvatura di Gauss	42
3.5	Curvature	43
3.5.1	Curvatura normale	43
3.5.2	Curvature principali - Direzioni principali	44
3.5.3	Direzioni e linee asintotiche	45
3.6	Geodetiche	47
3.7	Superfici di rotazione	50
3.8	Superfici rigate	52
3.8.1	Rigate sviluppabili	53
3.9	Teorema di Gauss-Bonnet	55

3.9.1 la caratteristica di Eulero di una superficie 56

Geometria differenziale

Varietà differenziabili

1.1 Varietà differenziabili

Sia X una varietà topologica di dimensione n , cioè uno spazio topologico di Hausdorff, connesso, localmente euclideo di dimensione n .

Ogni punto $x \in X$ ha un intorno aperto U omeomorfo ad un disco aperto di \mathbb{R}^n tramite $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{D}^n$; la coppia (U, \mathbf{x}) si dice *carta locale*.

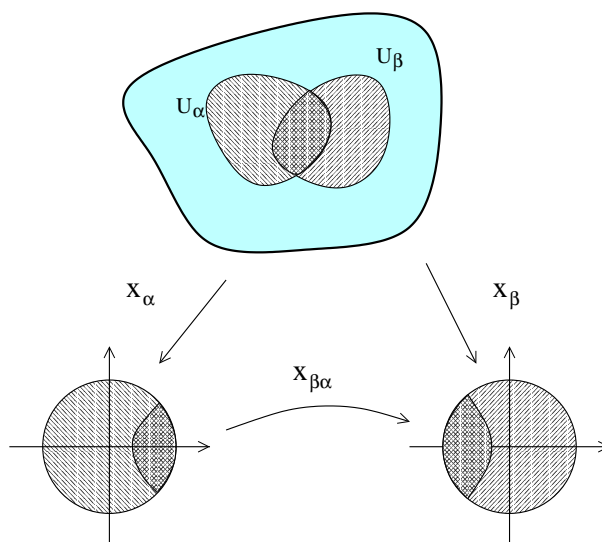
Scriveremo $\mathbf{x}(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, dove $x_1, \dots, x_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono le componenti di \mathbf{x} , dette *coordinate locali* in U definite da \mathbf{x} .

Definizione. Un atlante (topologico) è una collezione di carte locali $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tale che $X \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Consideriamo ora due carte $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ e $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$ tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$; la funzione

$$\mathbf{x}_{\beta\alpha} = \mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbf{x}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è detta *funzione di transizione*. E' una funzione definita su un aperto di \mathbb{R}^n e a valori in \mathbb{R}^n , quindi ha senso studiarne la differenziabilità.



Definizione. Un atlante di classe \mathcal{C}^k (liscio) è un atlante tale che tutte le funzioni di transizione siano \mathcal{C}^k (lisce).

Definizione. Due atlanti di classe \mathcal{C}^k si dicono **equivalenti** se la loro unione è ancora un atlante di classe \mathcal{C}^k . Una classe di equivalenza di atlanti è detta **struttura differenziabile** di classe \mathcal{C}^k su X .

L'unione di tutti gli atlanti di una struttura differenziabile è ancora un atlante, detto **atlante universale**.

Definizione. Una **varietà differenziabile** di classe \mathcal{C}^k (liscia) è una varietà topologica dotata di un atlante differenziabile di classe \mathcal{C}^k (liscio), o equivalentemente, di una struttura differenziabile di classe \mathcal{C}^k (liscia).

Esempi.

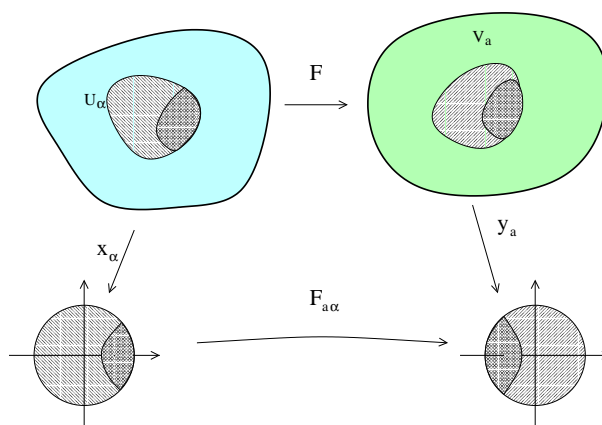
1. \mathbb{R}^n
2. \mathbb{S}^n
3. $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$
4. Le superfici compatte

1.2 Funzioni e applicazioni differenziabili

Definizione. Sia X una varietà differenziabile e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua; f si dice **differenziabile** in $p \in X$ se, presa una carta locale $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ il cui dominio contiene x , la funzione reale $f_\alpha = f \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_\alpha(p)$. Tale funzione si dice **espressione locale** di f nella carta $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$.

Osservazione. La definizione è ben posta: se $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$ è un'altra carta locale il cui dominio contiene p , allora $f_\beta = f \circ \mathbf{x}_\beta^{-1} = f \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1} = f_\alpha \circ \mathbf{x}_{\alpha\beta}$ è differenziabile in quanto composta di funzioni differenziabili.

Definizione. Analogamente, se X e Y sono due varietà differenziabili, un'applicazione $F : X \rightarrow Y$ si dice **differenziabile** in p se è una sua espressione locale $F_{\alpha\beta} = \mathbf{y}_\beta \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_\alpha(p)$.



Osservazione. Anche in questo caso la definizione è ben posta.

Definizione. Un'applicazione tra varietà differenziabili $F : X \rightarrow Y$ che sia biunivoca e differenziabile di classe \mathcal{C}^k con inversa differenziabile di classe \mathcal{C}^k è detta **diffeomorfismo** di classe \mathcal{C}^k .

1.3 Spazio tangente in un punto

Sia X una varietà differenziabile liscia e $p \in X$ un suo punto. Per ogni intorno aperto U di p poniamo

$$\mathcal{E}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ liscia}\}.$$

Diremo inoltre che f è **localmente liscia** in p se $f \in \mathcal{E}(U)$ per qualche intorno aperto U di p .

Introduciamo ora una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni localmente lisce in p in questo modo: se $f \in \mathcal{E}(U)$ e $g \in \mathcal{E}(V)$ diremo che f è equivalente a g se esiste un intorno W di p tale che $W \subset U \cap V$ e $f|_W = g|_W$.

La classe di equivalenza di funzioni localmente lisce in p rappresentata da f si indica con $[f]$ e si dice **germe liscio** in p ; l'insieme quoziente rispetto a tale relazione di equivalenza si indica con \mathcal{E}_p e si dice **spiga** su p .

Nell'insieme \mathcal{E}_p si possono introdurre due operazioni:

$$[f] + [g] := [f + g]$$

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$$

rispetto alle quali l'insieme \mathcal{E}_p risulta essere un anello commutativo dotato di unità. L'introduzione del prodotto esterno

$$\lambda[f] := [\lambda f]$$

rende \mathcal{E}_p una \mathbb{R} algebra, l'**algebra dei germi lisci** in p .

Definizione. Un **vettore tangente** ad X nel punto p è una funzione $v : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. v è lineare
2. v è una derivazione, cioè $v([f][g]) = f(p)v([g]) + v([f])g(p)$.

Definizione. L'insieme dei vettori tangenti nel punto p alla varietà differenziabile X prende il nome di **spazio tangente** ad X in p e si indica con $T_p X$.

Osservazione. Per ogni coppia di vettori tangenti v, w e per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ posso definire

$$(v + w)([f]) = v([f]) + w([f])$$

$$(\lambda v)([f]) = \lambda v([f]),$$

e questo mostra che lo spazio tangente in un punto ad una varietà differenziabile è uno spazio vettoriale reale.

Esempio. Sia $p \in X$ un punto di una varietà differenziabile liscia, $[f] \in \mathcal{E}_p$ e (U, \mathbf{x}) una carta locale tale che $p \in U$ con coordinate locali (x_1, \dots, x_n) . Sia $f \in \mathcal{E}(U)$ un rappresentante della classe $[f]$. Definiamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p ([f]) = \frac{\partial f \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial u_i}(\mathbf{x}(p))$$

Si può verificare che la definizione è ben posta e che le $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ sono elementi di $T_p X$.

Il seguente teorema mostra che i vettori tangenti descritti nell'esempio costituiscono una base per lo spazio tangente.

Teorema. *Lo spazio vettoriale tangente $T_p X$ ad una varietà differenziabile liscia di dimensione n in un punto $p \in X$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione n . Data una carta locale (U, \mathbf{x}) con coordinate locali (x_1, \dots, x_n) i vettori tangenti $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ costituiscono una base per $T_p X$.*

Per la dimostrazione useremo il seguente

Lemma. *Sia p un punto di X , $f \in \mathcal{E}(V)$ con $p \in V$ e (U, \mathbf{x}) carta locale che contiene p con coordinate locali (x_1, \dots, x_n) ; sia $\mathbf{x}(p) = c = (c_1, \dots, c_n)$. Allora esistono un intorno $W \subset U \cap V$, n funzioni $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}(W)$ tali che in W*

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - c_i) f_i;$$

Inoltre $f_i(p) = \frac{\partial [f]}{\partial x_i}(p)$.

Dim. Scegliamo un disco $B_\delta(c)$ tale che $B_\delta(c) \subset \mathbf{x}(U \cap V)$ e sia $W = \mathbf{x}^{-1}(B_\delta(c))$; sia p' un punto di W , sia $\mathbf{x}(p') = b = (b_1, \dots, b_n)$ e sia $\tau \in [0, 1]$. Sia $g = f \circ \mathbf{x}^{-1}$ l'espressione locale di f in U e poniamo $\alpha(\tau) = g(c + \tau(b - c))$. Si ha che

$$\alpha'(\tau) = \sum \frac{\partial g}{\partial u_i}((c + \tau(b - c)))(b - c);$$

poniamo

$$g_i(b) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u_i}((c + \tau(b - c))) d\tau;$$

per il teorema fondamentale del calcolo possiamo scrivere

$$g(b) - g(c) = \alpha(1) - \alpha(0) = \int_0^1 \alpha'(\tau) d\tau = \sum g_i(b)(b_i - c_i).$$

Pertanto, posto $f_i = g_i \circ \mathbf{x}$ avremo

$$f(p') - f(p) = \sum f_i(p')(x_i(p') - x_i(p)).$$

Inoltre $f_i(p) = g_i(c) = \frac{\partial g}{\partial u_i} = \frac{\partial [f]}{\partial x_i}$. □

Dim. del teorema Sia $v \in T_p X$; innanzitutto mostriamo che $v([1]) = 0$; infatti $v([1]) = v([1][1]) = v([1]) + v([1])$.

Sia ora $[f] \in \mathcal{E}_p$; per il lemma precedente possiamo scrivere $[f] = f(p)[1] + \sum ([x_i] - c_i[1])[f_i]$ e quindi

$$v([f]) = \sum f_i(p)(v([x_i] - c_i[1])) = \sum \frac{\partial [f]}{\partial x_i}(p)v([x_i]).$$

Possiamo quindi scrivere

$$v = \sum v([x_i]) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

e quindi abbiamo mostrato che $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p$ sono un sistema di generatori per T_pX .

Scriviamo ora il vettore nullo come combinazione lineare

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \sum \mu_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \\ 0 &= \mathbf{0}([x_i]) = \sum \mu_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([x_i]) = \mu_i \end{aligned}$$

e quindi i vettori $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p$ sono linearmente indipendenti. \square

Vediamo ora una caratterizzazione geometrica dei vettori tangenti

Definizione. Una curva differenziabile di classe \mathcal{C}^k in X è una applicazione differenziabile $\gamma : (-1, 1) \rightarrow X$ di classe \mathcal{C}^k .

Sia γ una curva differenziabile liscia tale che $\gamma(0) = p$; alla curva γ si può associare un elemento γ_* di T_pX in questo modo:

$$\gamma_*([f]) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Si può anche mostrare che ogni elemento di v di T_pX si può scrivere come $v = \gamma_*$ per una curva γ opportuna (e non unica).

Scegliamo una carta locale (U, \mathbf{x}_α) con coordinate locali $(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha})$ che contiene p e siano $\gamma_{i\alpha} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ le componenti di $\gamma_\alpha = \mathbf{x}_\alpha \circ \gamma$; il vettore tangente γ_* si potrà scrivere sulla base $\left(\frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n\alpha}} \right)_p$:

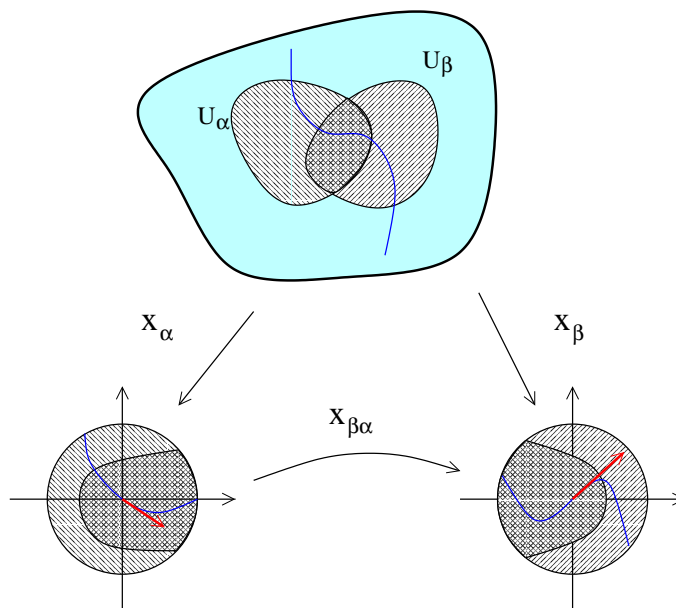
$$\gamma_* = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} \right)_p ;$$

ora, poichè $\gamma_*([x_{i\alpha}]) = \frac{d(x_{i\alpha} \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\gamma_{i\alpha}}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{\gamma}_{i\alpha}(0)$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} \right)_p (x_j) = \delta_{ij}$ otteniamo

$$\gamma_* = \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_{i\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} \right)_p .$$

Quindi, scelta una carta locale che contiene p possiamo identificare γ_* con il vettore $\dot{\gamma}_\alpha$ di \mathbb{R}^n tangente a γ_α ; pertanto T_pX si può identificare con $T_p\mathbb{R}^n$.

Cosa succede cambiando carta? Scegliamo un'altra carta (V, \mathbf{x}_β) che contiene p , con coordinate locali $(x_{1\beta}, \dots, x_{n\beta})$. In tale carta la curva ha un'altra espressione locale $\gamma_\beta = \mathbf{x}_\beta \circ \gamma$, con componenti $\dot{\gamma}_{i\beta}$;



Il vettore tangente γ_* si scriverà, sulla base $\left(\frac{\partial}{\partial x_{i\beta}}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n\beta}}\right)_p$:

$$\gamma_* = \sum_{j=1}^m \dot{\gamma}_{j\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j\beta}}\right)_p;$$

Qual è la relazione che lega questi due vettori?

$$\gamma_\beta(t) = \mathbf{x}_\beta(\gamma(t)) = \mathbf{x}_\beta(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(\gamma(t)))) = \mathbf{x}_{\beta\alpha}(\gamma_\alpha(t))$$

$$\dot{\gamma}_\beta(t) = J(\mathbf{x}_{\beta\alpha}) \cdot \dot{\gamma}_\alpha(t).$$

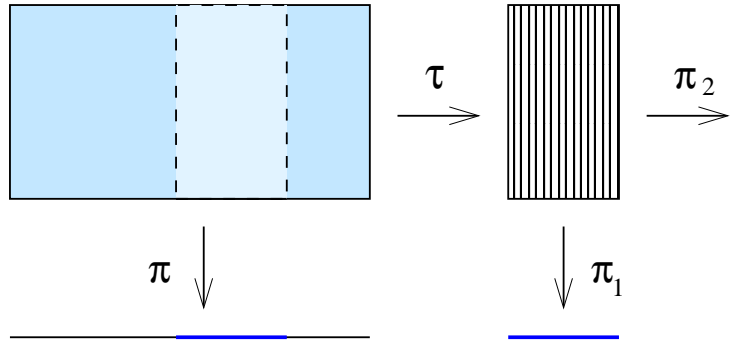
Possiamo quindi ottenere una nuova definizione di vettore tangente:

Definizione. Un vettore tangente ad X in p è una classe di equivalenza $\{(\alpha, \underline{v})\}$ con $\alpha \in A, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ e tale che $(\alpha, \underline{v}) \sim (\beta, \underline{w}) \Leftrightarrow p \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $\underline{w} = J(\mathbf{x}_{\beta\alpha}) \cdot \underline{v}$.

1.4 Fibrato tangente

Definizione. Un fibrato vettoriale di rango k su X è uno spazio topologico E dotato di un'applicazione continua e suriettiva $\pi : E \rightarrow X$ tale che

1. $\forall p \in X \quad \pi^{-1}(p)$ sia uno spazio vettoriale reale di dimensione k .
2. $\forall p \in X \exists U \ni p$ aperto e $\tau : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ omeomorfismo tale che $\pi_1 \circ \tau = \pi$ dove $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ è la proiezione sul primo fattore.
3. $\forall p \in X \quad \pi_2 \circ \tau$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali dove $\pi_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è la proiezione sul secondo fattore.



Sia ora TX l'insieme di tutti i vettori tangenti ad X , cioè

$$TX = \bigcup_{p \in X} T_p X$$

e sia $\pi : TX \rightarrow X$ la mappa che associa a $v \in TX$ il punto p se $v \in T_p X$.

TX è un fibrato vettoriale, detto **fibrato tangente** ad X .

La prima condizione è verificata, in quanto $\pi^{-1}(p) = T_p X$.

Sia ora p un punto di X e $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ una carta locale che contiene p , e siano $(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha})$ coordinate locali. Sia $p' \in U_\alpha$ e $v \in \pi^{-1}(p')$; possiamo scrivere $v = \sum v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} \right)_{p'}$ e quindi possiamo definire $\tau_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ in questo modo: $\tau(v) = (p', v_1, \dots, v_n)$.

E' semplice verificare che l'applicazione τ ha le proprietà richieste.

Siano ora

$$TU_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$T\mathbf{x}_\alpha : TU_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n} = ((\mathbf{x}_\alpha, Id) \circ \tau_\alpha).$$

Usando le $T\mathbf{x}_\alpha$ diamo a TX una topologia, i cui aperti sono i sottoinsiemi $W \subset TX$ tali che $W \cap TU_\alpha$ è aperto in TU_α per ogni α .

Gli aperti di TU_α sono i sottoinsiemi V tali che $T\mathbf{x}_\alpha(V)$ è aperto in \mathbb{R}^{2n} .

Gli aperti $TU_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ e gli omeomorfismi τ_α costituiscono un atlante differenziabile per TX , che risulta essere esso stesso una varietà differenziabile di dimensione $2n$.

1.5 Differenziale di un'applicazione

Siano X e Y varietà differenziabili, e $F : X \rightarrow Y$ un'applicazione differenziabile; sia p un punto di X e $p' = F(p)$.

L'applicazione F induce un'applicazione

$$d_p F : T_p X \rightarrow T_{p'} Y$$

definita ponendo

$$d_p F(v)([f]) := v(f \circ F).$$

Si può verificare che $d_p F$ è un'applicazione lineare di spazi vettoriali; tale applicazione è detta **differenziale** di F in p .

Possiamo più in generale considerare l'applicazione

$$dF : TX \rightarrow TY$$

definita ponendo

$$dF(p, v) := d_p F(v);$$

tale applicazione risulta essere un'applicazione differenziabile tra le varietà differenziabili TX e TY .

Scegliamo ora carte locali $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ e (V_a, \mathbf{y}_a) contenenti p e p' rispettivamente e con coordinate locali $(x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha})$ e (y_{1a}, \dots, y_{ma}) .

Siano $\left(\frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n\alpha}}\right)_p$ e $\left(\frac{\partial}{\partial y_{1a}}\right)_{p'}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_{ma}}\right)_{p'}$ basi per $T_p X$ e $T_{p'} Y$ rispettivamente. Vogliamo trovare la matrice dell'applicazione lineare $d_p F$ rispetto a tali basi.

Il coefficiente di posto ij sarà dato da

$$\left[d_p F \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}} \right)_p \right) \right] ([y_{ia}]) = \left(\frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}} \right)_p ([y_{ia} \circ F]) = \frac{\partial (y_{ia} \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})}{\partial u_j} (\mathbf{x}_\alpha(p)),$$

e quindi la matrice cercata è la matrice $J(F_{a\alpha})$, jacobiana della funzione $F_{a\alpha} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ espressione locale di F rispetto alle carte $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ e (V_a, \mathbf{y}_a) .

Come si trasforma la matrice al cambiare delle carte?

Siano $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$ e (V_b, \mathbf{y}_b) altre carte contenenti p e p' ,

$$\begin{aligned} J(F_{b\beta}) &= J(\mathbf{y}_b \circ F \circ \mathbf{x}_\beta^{-1}) = J(\mathbf{y}_b \circ \mathbf{y}_a^{-1} \circ \mathbf{y}_a \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1}) = \\ &= J(\mathbf{y}_{ba} \circ \mathbf{y}_a \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_{\alpha\beta}) = J(\mathbf{y}_{ba}) \cdot J(\mathbf{y}_a \circ F \circ \mathbf{x}_\alpha) \cdot J(\mathbf{x}_{\alpha\beta}) = \\ &= J(\mathbf{y}_{ba}) \cdot J(F_{a\alpha}) \cdot J(\mathbf{x}_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

1.6 Immersioni, sommersioni, embedding

Sia $F : X \rightarrow Y$ un'applicazione differenziabile e $p \in X$

Definizione. F si dice *immersiva* in p se l'applicazione lineare

$$d_p F : T_p X \rightarrow T_p Y$$

è iniettiva.

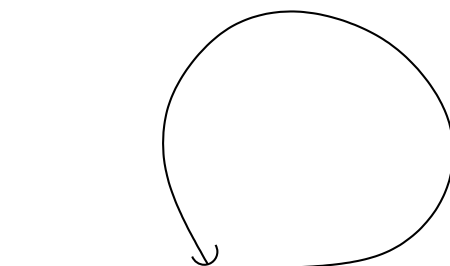
F si dice *sommersiva* in p se $d_p F$ è suriettiva. F è un'*immersione* (sommersione) se è immersiva (sommersiva) per ogni $p \in X$

Definizione. F è un'*embedding* se è un'*immersione* ed è un omeomorfismo sull'immagine ($X \simeq F(X)$ con la topologia indotta da Y)

Esempi.

1. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = t^3$ non è immersiva in 0.
2. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ è un'*immersione*, ma non un'*embedding*.
3. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (t, t^2)$ è un'*embedding*.
4. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (t^2, t^3)$ non è immersiva in 0.

5. Per avere un'embedding, non basta che f sia immersiva ed iniettiva:



6. Immersione canonica di \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^n , con $k \leq n$

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

7. Sommersione canonica di \mathbb{R}^n su \mathbb{R}^k , con $k \leq n$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$$

Abbiamo visto che un'immersione non è necessariamente un'embedding, ma lo diventa a patto di restringere la varietà:

Proposizione. *Sia $F : X \rightarrow Y$ un'immersione; allora ogni punto $p \in X$ ha un intorno aperto V tale che $F|_V : V \rightarrow Y$ sia un'embedding.*

Una condizione sufficiente per un'immersione per essere un'embedding è la seguente:

Proposizione. *Sia $F : X \rightarrow Y$ un'immersione iniettiva. Se X è compatta, allora F è un'embedding.*

1.7 Sottovarietà

Sia X una varietà differenziabile e $\tilde{A} = \{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ il suo atlante universale.

Sia $S \subset X$ un sottoinsieme tale che esiste k intero tale che $\forall p \in S$ esiste $\alpha \in A$ con $\mathbf{x}(U_\alpha \cap S) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ dove $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\}$.

Un tale S è detta **sottovarietà differenziabile** di X ; le coppie $\{(U_\alpha \cap S, \mathbf{x}_\alpha|_{U_\alpha \cap S})\}$ costituiscono un atlante per S , che è quindi essa stessa una varietà differenziabile.

Il prossimo risultato ci fornisce un'importante condizione per trovare sottovarietà

Teorema. *Sia $F : X \rightarrow Y$ un'applicazione differenziabile, e sia $q \in Y$. Se F è sommersiva nei punti di $F^{-1}(q)$ allora $F^{-1}(q)$ è una sottovarietà differenziabile di X di dimensione $\dim X - \dim Y$.*

Esempio. Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme definito da equazioni $F_1 = F_2 = \dots = F_k = 0$; allora, se il rango della matrice jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

è k allora S è una sottovarietà di dimensione $n - k$

La relazione tra embedding e sottovarietà è espressa dal seguente

Teorema. *Sia Y una varietà differenziabile. $S \subset Y$ è una sottovarietà se e solo se esistono una varietà differenziabile X e un'embedding $F : X \rightarrow Y$ tale che $F(X) = S$.*

Il seguente fondamentale risultato ci dice che ogni varietà differenziabile compatta può essere realizzata come sottovarietà di un opportuno spazio euclideo:

Teorema. *(d'immersione di Whitney) Sia X una varietà differenziabile compatta di dimensione n . Allora esiste un'embedding di X in \mathbb{R}^{2n+1}*

Osservazione. La stessa varietà differenziabile può essere immersa in uno spazio euclideo in molti modi diversi.

Curve differenziabili

Per il teorema di Whitney una varietà differenziabile compatta di dimensione uno può sempre essere immersa in uno spazio euclideo tridimensionale. Sia quindi X una varietà differenziabile di dimensione uno, p un suo punto, (U, \mathbf{x}) una carta locale centrata in p e sia $F : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'embedding.

La composizione $F \circ \mathbf{x}^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'embedding di un intervallo aperto I di \mathbb{R} nello spazio euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 .

2.1 Curve regolari - lunghezza d'arco

Definizione. Una curva regolare è un'immersione $\mathbf{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, con I intervallo aperto di \mathbb{R} . L'immagine $\mathbf{P}(I) \subset \mathbb{R}^3$ si dice **supporto** della curva.

Osservazione. A meno di restringere l'intervallo, come abbiamo visto, possiamo assumere che \mathbf{P} sia un'embedding.

Osservazione. Sia $\mathbf{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione differenziabile; allora \mathbf{P} è una curva regolare se e solo se $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq \mathbf{0}$.

In particolare si può associare ad ogni punto $\mathbf{P}(t)$ della traccia di una curva regolare $\mathbf{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ il vettore tangente o vettore velocità $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq \mathbf{0}$.

Data una curva regolare $\mathbf{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e un diffeomorfismo $\theta : (c, d) \rightarrow (a, b)$, possiamo considerare la curva regolare $\tilde{\mathbf{P}}(t) := \mathbf{P} \circ \theta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$, che chiameremo **riparametrizzazione** di \mathbf{P} ; questo corrisponde ad un cambiamento di carta locale.

Tra tutte le parametrizzazioni possibili, ne esiste una particolarmente conveniente, tale che il vettore velocità abbia norma costante unitaria; si tratta del parametro **lunghezza d'arco**.

Sia $\mathbf{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, e sia $[a', b'] \subset (a, b)$ un intervallo chiuso. Per ogni suddivisione S del tipo $a' = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b'$ consideriamo il numero reale

$$\sum_{i=1}^n \|\mathbf{P}(t_i) - \mathbf{P}(t_{i-1})\| = l(\mathbf{P}, S);$$

geometricamente $l(\mathbf{P}, S)$ è la lunghezza di una poligonale inscritta in $\mathbf{P}([a', b'])$ con i vertici in $\mathbf{P}(t_i)$.

La lunghezza della curva è definita come

$$l(\mathbf{P}) = \sup_S l(\mathbf{P}, S).$$

Si può dimostrare che

$$l(\mathbf{P}) = \int_{a'}^{b'} \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt$$

In questo modo possiamo trovare una parametrizzazione intrinseca della curva: chiamiamo parametro **lunghezza d'arco** di una curva regolare $\mathbf{P}(t)$, fissato un punto $\mathbf{P}(t_0)$ il parametro s così definito:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{P}}(h)\| dh$$

Proposizione. Se $\mathbf{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è parametrizzata con la lunghezza d'arco, allora ha vettore tangente $\mathbf{P}'(s)$ di norma unitaria.

Dim. Per la regola di derivazione di funzioni composte

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d\mathbf{P}(s(t))}{dt} = \mathbf{P}'(s(t)) \frac{ds}{dt} = \mathbf{P}'(s(t)) \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|.$$

Prendendo la norma di ambo i membri si ha la tesi. \square

Esempio. Elica cilindrica Siano a, b reali positivi, e consideriamo la curva

$$\mathbf{P}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \quad t \in \mathbb{R}$$

Il suo vettore velocità è dato da $\dot{\mathbf{P}}(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$, e la norma del vettore velocità è $\|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pertanto il parametro arco è dato da

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dh = (\sqrt{a^2 + b^2})t.$$

Posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ scriviamo la parametrizzazione naturale dell'elica in questo modo:

$$\mathbf{P}(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right).$$

2.2 Il triedro di Frenet

Definizione. Una curva regolare $\mathbf{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice **fortemente regolare** se $\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t) \neq 0 \quad \forall t$.

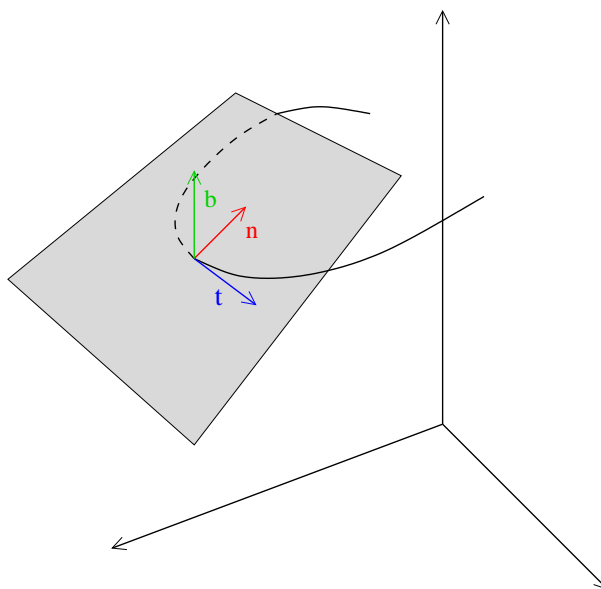
Sia quindi $\mathbf{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva fortemente regolare, parametrizzata con la lunghezza d'arco e sia $\mathbf{t}(s) = \mathbf{P}'(s)$ il vettore tangente alla curva.

Consideriamo il vettore $\mathbf{t}'(s) = |\mathbf{t}'(s)|\mathbf{n}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, detto **vettore curvatura** della curva; \mathbf{n} è il **versore normale** e κ è la **(prima) curvatura** della curva.

Osservazione. Il versore tangente e il versore normale sono ortogonali. Infatti, poiché \mathbf{t} è un versore, derivando la relazione $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} \equiv 1$ si ha che $2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0$.

Il piano individuato dal versore tangente e dal versore normale è detto **piano osculatore**; il versore normale a questo piano, $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ è detto **versore binormale**.

il piano individuato da \mathbf{n} e \mathbf{b} è detto **piano normale**, quello individuato da \mathbf{t} e \mathbf{b} è detto **piano rettificante**.



Il modulo della derivata del versore binormale misura la velocità di cambiamento dei piani osculatori vicini al punto considerato, e quindi quanto rapidamente la curva si allontana dal piano osculatore.

Consideriamo perciò il vettore $\mathbf{b}'(s)$; dalla definizione di \mathbf{b} abbiamo che

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s).$$

Quindi, oltre ad essere ortogonale a $\mathbf{b}(s)$ perché quest'ultimo è un versore, $\mathbf{b}'(s)$ è anche ortogonale a $\mathbf{t}(s)$; può quindi essere scritto in questo modo:

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$$

$\tau(s)$ è detta **torsione** o **seconda curvatura** della curva.

Proposizione. Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Dim. Calcoliamo la derivata di $\mathbf{n}(s)$; ricordando che $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$ abbiamo che

$$\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s) = \tau(s)\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

Abbiamo così provato le relazioni sopra scritte. La matrice antisimmetrica che le esprime è detta **matrice di Frenet**. \square

Esempio. Calcoliamo la matrice di Frenet dell'elica cilindrica

$$\mathbf{P}(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{c} \right), a \sin \left(\frac{s}{c} \right), b \frac{s}{c} \right)$$

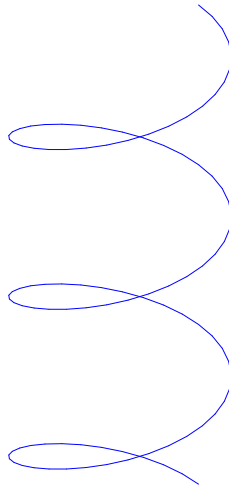
$$\mathbf{t}(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin \left(\frac{s}{c} \right), \frac{a}{c} \cos \left(\frac{s}{c} \right), \frac{b}{c} \right)$$

Calcoliamo la derivata $\mathbf{t}'(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \left(\frac{s}{c} \right), -\frac{a}{c^2} \sin \left(\frac{s}{c} \right), 0 \right)$; la norma di questo vettore è $\sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$, quindi $\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}$ e

$$\mathbf{n}(s) = \left(-\cos \left(\frac{s}{c} \right), -\sin \left(\frac{s}{c} \right), 0 \right)$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \left(\frac{b}{c} \sin \left(\frac{s}{c} \right), -\frac{b}{c} \cos \left(\frac{s}{c} \right), \frac{a}{c} \right)$$

Calcoliamo la derivata $\mathbf{b}'(s) = \left(\frac{b}{c^2} \cos \left(\frac{s}{c} \right), \frac{b}{c^2} \sin \left(\frac{s}{c} \right), 0 \right) = -\frac{b}{c^2} \mathbf{n}(s)$, e quindi troviamo la torsione $\tau(s) = \frac{b}{a^2 + b^2}$.



La matrice di Frenet dell'elica cilindrica è pertanto

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{a^2 + b^2} & 0 \\ -\frac{a}{a^2 + b^2} & 0 & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ 0 & -\frac{b}{a^2 + b^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Prendendo il caso particolare $b = 0$, che corrisponde ad una circonferenza di raggio a , troviamo $\kappa(s) = \frac{1}{a}$ e $\tau(s) = 0$.

2.3 Curvatura e torsione

Abbiamo visto nella sezione precedente come è possibile associare ad una curva fortemente regolare nello spazio due funzioni differenziabili, la curvatura $\kappa(s)$ e la torsione $\tau(s)$; vedremo ora come tali funzioni individuino la curva a meno di isometrie dello spazio euclideo.

Teorema. *Siano $\mathbf{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{Q} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ due curve fortemente regolari con parametro arco tali che $\kappa_P(s) = \kappa_Q(s)$ e $\tau_P(s) = \tau_Q(s)$. Allora esiste un'isometria di \mathbb{R}^3 che manda \mathbf{P} in \mathbf{Q} .*

Dim. Supponiamo che $0 \in I$; siano $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ e $\bar{\mathbf{t}}_0, \bar{\mathbf{n}}_0, \bar{\mathbf{b}}_0$ le terne di Frenet delle due curve per $s = 0$; esiste un'isometria di \mathbb{R}^3 che manda $\mathbf{P}(0)$ in $\mathbf{Q}(0)$ e manda $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ in $\bar{\mathbf{t}}_0, \bar{\mathbf{n}}_0, \bar{\mathbf{b}}_0$.

Vogliamo mostrare che, una volta effettuata questa trasformazione su \mathbf{P} , abbiamo che $\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}(s)$. Consideriamo la seguente espressione

$$A(s) = |\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}|^2 + |\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}|^2 + |\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}|^2.$$

Vogliamo mostrare che tale espressione è costante; calcoliamo perciò la derivata rispetto ad s

$$2(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot (\mathbf{t}' - \bar{\mathbf{t}}') + 2(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{n}' - \bar{\mathbf{n}}') + 2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\mathbf{b}' - \bar{\mathbf{b}}) =$$

$$2[\kappa(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) - \kappa(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) + \tau(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) - \tau(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}})] = 0.$$

Poichè $A(0) = 0$, allora $A \equiv 0$, e quindi le terne di Frenet coincidono su tutto l'intervallo di definizione; in particolare $\mathbf{t}(s) = \bar{\mathbf{t}}(s)$, e quindi, integrando $\mathbf{P}'(s) = \mathbf{Q}'(s) + c$, ma $\mathbf{P}(0) = \mathbf{Q}(0)$, e quindi $\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}(s)$. \square

Si può provare che non solo una curva è unicamente individuata dalla sua curvatura e dalla sua torsione (a meno di isometrie), ma che, comunque assegnate due funzioni differenziabili $\kappa(s)$ e $\tau(s)$, queste sono curvatura e torsione di una curva:

Teorema. *Date due funzioni differenziabili $\kappa(s) > 0$, $\tau(s) : J \rightarrow \mathbb{R}$ con J intervallo in \mathbb{R} contenente 0 esiste un intervallo $0 \in I \subset J$ e una curva fortemente regolare $\mathbf{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ le cui funzioni curvatura e torsione sono $\kappa(s)$ e $\tau(s)$.*

Vediamo ora che curve corrispondono a valori speciali di curvatura e torsione.

Proposizione.

- Una curva regolare $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ con curvatura identicamente nulla ha supporto contenuto in una retta.
- Una curva fortemente regolare $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ è piana se e solo se $\tau(s) \equiv 0$.

Dim. Poichè $\kappa(s) \equiv 0$, allora $\mathbf{P}''(s) \equiv 0$ e $\mathbf{P}'(s) = \mathbf{t}(s)$ è costante: $\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}_0$. Ne segue che $\mathbf{P}(s) = s\mathbf{t}_0 + \mathbf{P}_0$.

Se la curva è piana, allora \mathbf{t} e \mathbf{n} individuano lo stesso piano per ogni valore di s ; in particolare \mathbf{b} è costante e τ è nulla.

Viceversa, se $\tau \equiv 0$, allora \mathbf{b} è costante; consideriamo la funzione

$$f(s) = (\mathbf{P}(s) - \mathbf{P}(0)) \cdot \mathbf{b}$$

e deriviamola

$$f'(s) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Segue che $f(s) = f(0) = 0$, cioè la curva giace nel piano ortogonale a \mathbf{b} e passante per $\mathbf{P}(0)$. \square

Proposizione.

- Una curva fortemente regolare $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ con curvatura costante e torsione nulla è una circonferenza.
- Una curva fortemente regolare $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ con curvatura e torsione costanti è una circonferenza.

Dim. Sia $\mathbf{Q} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'elica cilindrica $\mathbf{Q}(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c} \right)$; la curvatura e la torsione di tale curva sono date rispettivamente da $\kappa_{\mathbf{Q}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$ e $\tau_{\mathbf{Q}} = \frac{b}{a^2 + b^2}$; siano $\kappa_{\mathbf{P}}$ e $\tau_{\mathbf{P}}$ la curvatura e la torsione della curva \mathbf{P} . Con semplici passaggi algebrici si trova che, posto

$$a = \frac{\kappa_{\mathbf{P}}}{\kappa_{\mathbf{P}}^2 + \tau_{\mathbf{P}}^2} \quad a = \frac{\kappa_{\mathbf{P}}}{\kappa_{\mathbf{P}}^2 + \tau_{\mathbf{P}}^2}$$

si ha $\kappa_{\mathbf{Q}} = \kappa_{\mathbf{P}}$ e $\tau_{\mathbf{Q}} = \tau_{\mathbf{P}}$, e quindi esiste un'isometria che porta \mathbf{P} in \mathbf{Q} . Per $\tau_{\mathbf{Q}} = 0$ l'elica è una circonferenza. \square

2.4 Forma canonica locale - Enti osculatori

Vediamo come si scrivono le equazioni di una curva nel riferimento dato dal triedro di Frenet: scegliamo cioè un punto $\mathbf{P}(s_0)$ e prendiamolo come origine, prendendo come riferimento ortonormale $\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)$; supponiamo che $s_0 = 0$ e scriviamo $\mathbf{P}(s)$ in serie di Taylor in un intorno del punto

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}'(0)s + \frac{\mathbf{P}''(0)}{2}s^2 + \frac{\mathbf{P}'''(0)}{6}s^3 + o(s^3)$$

Sappiamo che $\mathbf{P}'(0) = \mathbf{t}$, $\mathbf{P}''(0) = \kappa\mathbf{n}$; calcoliamo $\mathbf{P}'''(0) = \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' = \kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}$. Abbiamo perciò

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(0) + \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6} \right) \mathbf{t} + \left(\frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\kappa' s^3}{6} \right) \mathbf{n} + \frac{\kappa\tau s^3}{6} \mathbf{b} + o(s^3)$$

Utilizzando la forma canonica locale troviamo le equazioni del piano, della circonferenza e della sfera che meglio approssimano la curva nel punto.

Consideriamo il generico piano passante per l'origine:

$$ax + by + cz = 0$$

e sostituiamo l'espressione locale di \mathbf{P}

$$a \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6} \right) + b \left(\frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\kappa' s^3}{6} \right) + c \frac{\kappa \tau s^3}{6} + o(s^3) = 0$$

$$as + \frac{b\kappa s^2}{2} + s^3 \left(\frac{-a\kappa^2 + b\kappa' + c\kappa\tau}{6} \right) + o(s^3) = 0.$$

Da quest'equazione troviamo che in generale (cioè se $\tau \neq 0$) il massimo di intersezioni di un piano con la curva è tre, ed è ottenuto per $a = b = 0$, cioè dal piano $z = 0$, che è il piano osculatore.

Vediamo ora quale circonferenza sul piano osculatore approssima meglio la curva nel punto.

Una circonferenza di centro $(\alpha, \beta, 0)$ passante per l'origine avrà equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y = 0$$

Sostituiamo l'espressione locale di \mathbf{P}

$$s^2 - 2\alpha s - \alpha \frac{\kappa^2 s^3}{3} - \beta k s^2 - \beta \frac{\kappa' s^3}{3} + o(s^3) = 0$$

$$-2\alpha s + (1 - \beta k) s^2 - (\alpha \kappa^2 + \beta \kappa') \frac{s^3}{3} + o(s^3) = 0$$

Da quest'equazione troviamo che in generale (cioè se $\kappa' \neq 0$) il massimo di intersezioni di una circonferenza sul piano osculatore con la curva è tre, ed è ottenuto per

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{\kappa} \end{cases}$$

e quindi il centro della circonferenza osculatrice è

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$$

e il suo raggio è

$$r(s) = \frac{1}{\kappa}$$

Per finire troviamo la sfera che approssima meglio la curva nel punto.

Una sfera di centro (α, β, γ) passante per l'origine avrà equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y + z^2 - 2\gamma z = 0$$

Sostituiamo l'espressione locale di \mathbf{P}

$$s^2 - 2\alpha s - \alpha \frac{\kappa^2 s^3}{3} - \beta k s^2 - \beta \frac{\kappa' s^3}{3} - \gamma \frac{\kappa \tau s^3}{3} + o(s^3) = 0$$

$$-2\alpha s + (1 - \beta k)s^2 - (\alpha\kappa^2 + \beta\kappa' + \gamma\kappa\tau)\frac{s^3}{3} + o(s^3) = 0$$

Otteniamo quindi le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{\kappa} \\ \gamma = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} \end{cases}$$

e quindi il centro della sfera osculatrice è

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\mathbf{b}$$

e il suo raggio è

$$r(s) = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa'^2}{\tau^2\kappa^4}}$$

Osservazione. Le stesse condizioni possono essere usate per stabilire se una curva giace su una sfera S ; in tal caso, infatti, la sfera osculatrice è la stessa in ogni punto, ed è uguale ad S ; pertanto le condizioni di sfericità della curva saranno espresse in questo modo:

$$r(s) = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa'^2}{\tau^2\kappa^4}} = \bar{r} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{C}} \quad (2.2)$$

In realtà la prima condizione implica la seconda, ed è quindi sufficiente ad assicurare la sfericità della curva, come mostreremo ora. Innanzitutto mostriamo che, assumendo la 2.1, si ha che $\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = -\frac{\tau}{\kappa}$.

Sia $\rho = \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}$; dalla 2.1 si ha che $\rho^2 = \bar{r}^2 - \frac{1}{\kappa^2}$, e quindi $2\rho\rho' = -\frac{2\kappa'}{\kappa^3}$, da cui la tesi. A questo punto basta derivare la 2.2

$$\mathbf{C}'(s) = \mathbf{t} - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) - \frac{\tau}{\kappa}\mathbf{b} + \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\tau\mathbf{n} \equiv 0$$

da cui la tesi.

Osservazione. Dalle equazioni trovate possiamo osservare che la circonferenza osculatrice è data dall'intersezione della sfera osculatrice con il piano osculatore.

2.5 Curve con parametro arbitrario

Spesso, nella pratica, risulta impossibile esprimere le curve date con parametro arco, per cui vediamo come si esprimono le quantità di cui abbiamo parlato per curve parametrizzate con un parametro qualsiasi.

Proposizione. *Sia $\mathbf{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare; allora*

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{P}}}{\|\dot{\mathbf{P}}\|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}}{\|\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}\|}$$

$$\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}\|}{\|\dot{\mathbf{P}}\|^3}, \quad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}) \cdot \dot{\dot{\mathbf{P}}}}{\|\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}\|^2}$$

Dim. Innanzitutto, poichè $\mathbf{t} = \mathbf{P}'$, dalla derivazione di funzione composta otteniamo

$$\dot{\mathbf{P}}(s(t)) = \mathbf{P}'(s(t)) \frac{ds}{dt};$$

ricordiamo che $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|$, e quindi otteniamo subito l'espressione del vettore tangente; d'ora in poi, per alleggerire la notazione poniamo $v = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|$.

Calcoliamo l'espressione di $\ddot{\mathbf{P}}(t)$ e di $\dot{\dot{\mathbf{P}}}(t)$:

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d}{dt}(v\mathbf{P}') = \frac{dv}{dt}\mathbf{P}' + v\frac{d}{dt}\mathbf{P}' = \frac{dv}{dt}\mathbf{P}' + v^2\mathbf{P}'' = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v^2\kappa\mathbf{n}$$

Possiamo quindi trovare che

$$\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}} = \kappa v^3 \mathbf{b},$$

e da questa espressione ricaviamo la formula per la curvatura e per \mathbf{b} .

Ci resta da derivare l'espressione della torsione; dobbiamo calcolare innanzitutto $(\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}) \cdot \dot{\dot{\mathbf{P}}}$; poichè abbiamo già visto che $\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}} = \kappa v^3 \mathbf{b}$ ci basta trovare la componente di $\dot{\dot{\mathbf{P}}}$ lungo \mathbf{b} ; dall'espressione

$$\dot{\dot{\mathbf{P}}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dt} \mathbf{P}' + v^2 \mathbf{P}'' \right) = \frac{d^2 v}{dt^2} \mathbf{P}' + v \frac{dv}{dt} \mathbf{P}'' + 2v \frac{dv}{dt} \mathbf{P}'' + v^3 \mathbf{P}'''$$

vediamo che la componente lungo \mathbf{b} è data solo dall'ultimo addendo; ricordando che $v^3 \mathbf{P}''' = v^3 (\kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} + \tau \kappa \mathbf{b})$ abbiamo che $(\dot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}) \cdot \dot{\dot{\mathbf{P}}} = \tau \kappa^2 v^6$, da cui si conclude. \square

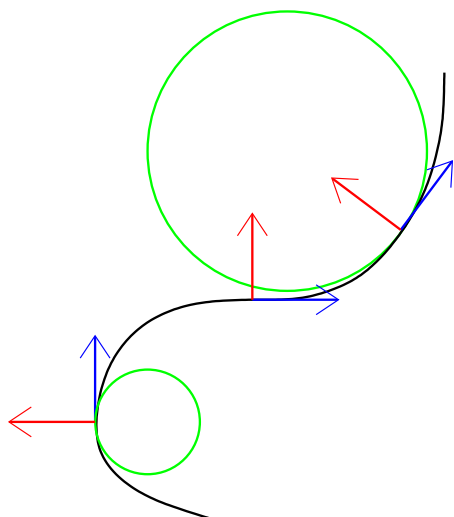
2.6 Curve piane

Sia $\mathbf{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare; in questo caso, consideriamo come versore normale quello che costituisce con \mathbf{t} una base ortonormale positivamente orientata; pertanto la curvatura κ della curva sarà data dalla formula

$$\kappa(s) = \mathbf{P}''(s) \cdot \mathbf{n}$$

e potrà pertanto assumere anche valori negativi. Se $\mathbf{P}(s) = (x(s), y(s))$, allora $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ e $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$; si noti che non abbiamo richiesto alla curva di essere fortemente regolare, pertanto è possibile che la curvatura si annulli; un punto nel quale la curvatura si annulla è detto **punto di flesso** della curva.

Se la curvatura è diversa da zero, allora la quantità $\left| \frac{1}{\kappa} \right|$ è detta **raggio di curvatura** della curva; il punto $\mathbf{c}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$, che abbiamo visto essere il centro della circonferenza osculatrice è detto **centro di curvatura**.



Vediamo ora un'altra dimostrazione della

Proposizione. *Se $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s)$ è una curva piana con $\kappa(s)$ costante, allora il suo supporto è contenuto in una circonferenza di raggio $\frac{1}{\kappa}$.*

Dim. Consideriamo i centri delle circonferenze osculatrici

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(s)$$

e deriviamo rispetto a s

$$\mathbf{c}' = \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa} (-\kappa \mathbf{t}) \equiv 0,$$

cioè $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}$ è costante; quindi

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{c} - \frac{1}{\kappa} \mathbf{n};$$

in particolare si ha che

$$\|\mathbf{P}(s) - \mathbf{c}\| = \frac{1}{\kappa}.$$

□

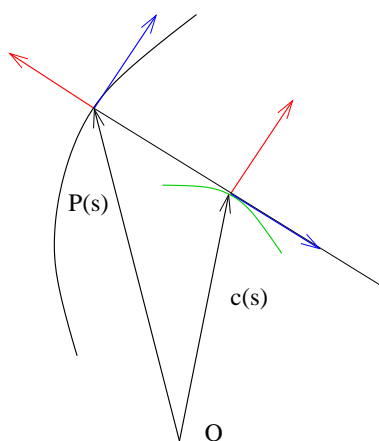
In generale, se consideriamo una curva piana che non abbia curvatura costante, i centri delle circonferenze osculatrici $\mathbf{c}(s) = \mathbf{P}(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)$ definiscono una curva, detta *evoluta* di \mathbf{P} .

Proposizione. *L'evoluta di \mathbf{P} è caratterizzata dall'essere l'involuppo delle normali di \mathbf{P} ; cioè la retta tangente all'evoluta in $\mathbf{c}(s)$ è normale alla curva in $\mathbf{P}(s)$.*

Dim. Dall'equazione dell'evoluta otteniamo (attenzione: l'evoluta non è parametrizzata con il parametro arco!) $\dot{\mathbf{c}}(s) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2(s)}\mathbf{n}(s)$.

Viceversa, supponiamo di avere una curva $\mathbf{c}(s)$ con la proprietà sopra descritta; avremo innanzitutto che

$$(\mathbf{P}(s) - \mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{t} = 0$$



e quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{P}(s) + f(s)\mathbf{n}(s);$$

derivando troviamo

$$\dot{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{t}(s) + f'(s)\mathbf{n}(s) - \kappa(s)f(s)\mathbf{t}(s)$$

e quindi concludiamo che $f(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ □

Definizione. L'*involuta* $\mathbf{I}(s)$ di una curva $\mathbf{P}(s)$ è una curva tale che la retta normale a $\mathbf{I}(s)$ è tangente a $\mathbf{P}(s)$.

Proposizione. *Una curva $\mathbf{P}(s)$ possiede infinite involute, date dall'equazione*

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{P}(s) + (a - s)\mathbf{t},$$

ove a è una costante reale.

Dim. Abbiamo che $(\mathbf{I}(s) - \mathbf{P}(s)) \cdot \mathbf{n} = 0$ e quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{P}(s) + f(s)\mathbf{t}(s);$$

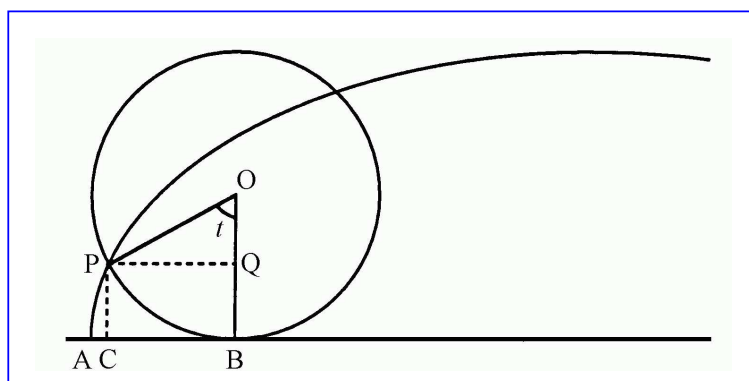
derivando troviamo

$$\dot{\mathbf{I}}(s) = \mathbf{t}(s) + f'(s)\mathbf{t}(s) + f(s)\kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

da cui $f'(s) = -1$ e quindi $f(s) = -s + a$. □

Esempi.

1. La cicloide



È la curva descritta da un punto sulla circonferenza di un cerchio che rotola senza strisciare; le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}.$$

Troviamo la lunghezza di un arco di cicloide (per t che varia da 0 a 2π); abbiamo che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix};$$

pertanto

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8.$$

Calcoliamo ora la curvatura della cicloide; abbiamo che

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix};$$

troviamo quindi che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t) = (\cos t - 1)\mathbf{k}$$

e il modulo della curvatura è dato da

$$|\kappa(t)| = \frac{\|\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|^3} = \frac{1 - \cos t}{(2 - 2 \cos t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2 - 2 \cos t}}.$$

Osserviamo che il versore normale ha direzione opposta rispetto al centro di curvatura, e quindi

$$\kappa(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2-2\cos t}}.$$

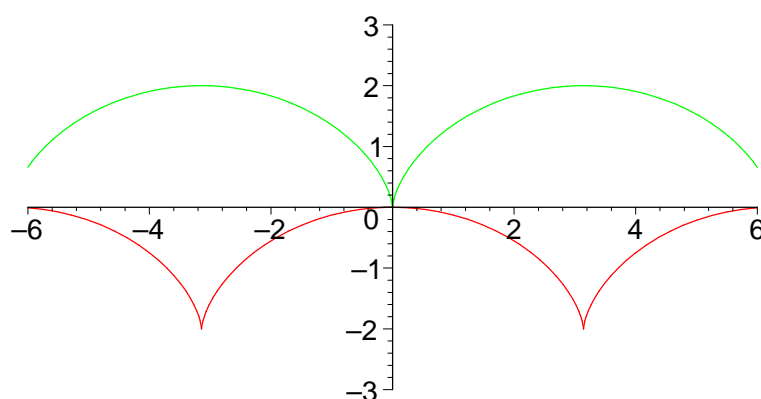
Troviamo ora l'equazione dell'evolva della cicloide; il versore normale è dato da

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-2\cos t}}$$

e quindi l'equazione dell'evolva è

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix};$$

si tratta di un'altra cicloide.



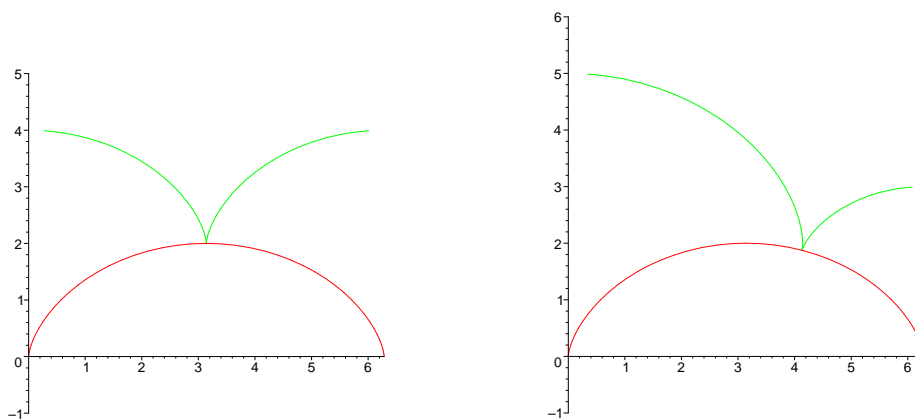
Per finire troviamo le equazioni delle involute; per far questo dobbiamo trovare il parametro arco

$$s(t) = \int \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt = \int \sqrt{2-2\cos t} dt = -4 \cos \frac{t}{2};$$

Le involute avranno perciò equazioni

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{P}(t) + (a + 4 \cos \frac{t}{2})\mathbf{t}(t);$$

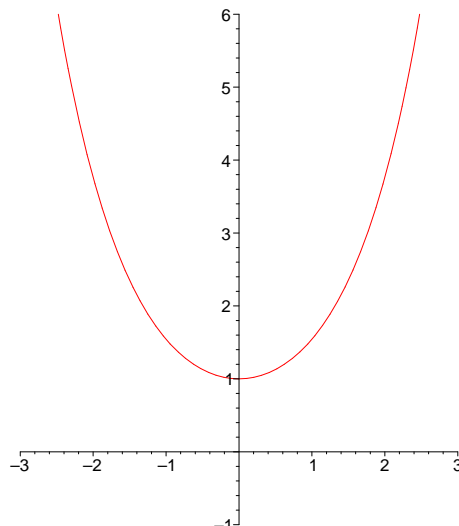
ne vediamo rappresentate due, che corrispondono ai valori $a = 0$ e $a = 1$.



2. La catenaria

È la curva di equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases} .$$



Calcoliamo la curvatura della catenaria; abbiamo che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix};$$

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh t \end{pmatrix};$$

troviamo quindi che

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t) = (\cosh t)\mathbf{k}$$

e il modulo della curvatura è dato da

$$|\kappa(t)| = \frac{\|\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|^3} = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Osserviamo che il versore normale punta verso il centro di curvatura, e quindi la curvatura è positiva

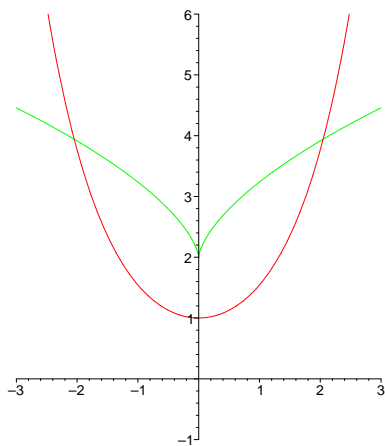
$$\kappa(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Troviamo ora l'equazione dell'evolvente della cicloide; il versore normale è dato da

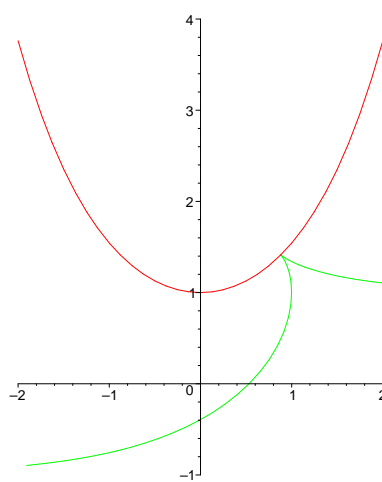
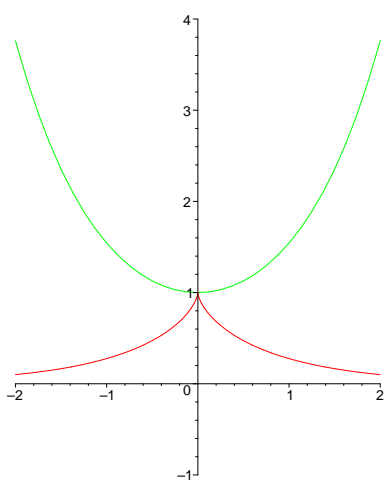
$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sinh t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cosh t}$$

e quindi l'equazione dell'evolvente è

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - \sinh t \cosh t \\ 2 \cosh t \end{pmatrix}.$$



Vediamo anche i grafici di due involute (per $a = 0$ e $a = 1$):



Superfici differenziabili

3.1 Superfici Riemanniane

Abbiamo visto che in \mathbb{R}^3 è possibile definire la **lunghezza** di una curva; ci chiediamo se è possibile fare la stessa cosa su una qualsiasi varietà differenziabile.

La lunghezza di una curva in \mathbb{R}^3 è definita in questo modo:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)} dt,$$

quindi ciò di cui abbiamo bisogno per definire la lunghezza di una curva è la nozione di prodotto scalare di vettori tangenti.

Cos'è un prodotto scalare in uno spazio vettoriale? E' una forma bilineare, simmetrica e definita positiva, cioè è una $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. $\varphi(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mu \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
2. $\varphi(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
3. $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
4. $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ e $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

a cui è associata una forma quadratica $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$, così definita: $\Phi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Scelta una base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ di V , a φ si associa la sua matrice rappresentativa $A = [a_{ij}]$ in questo modo: $a_{ij} = \varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$.

A questo punto, se $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ possiamo calcolare il prodotto scalare in questo modo:

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Osservazione. E' equivalente avere una forma bilineare simmetrica definita positiva o una forma quadratica definita positiva; infatti, se abbiamo $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo definire

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{v}))$$

Definizione. Una **superficie riemanniana** S è una superficie differenziabile liscia con un prodotto scalare φ definito sugli spazi tangenti che varia in modo liscio.

Cioè esiste una applicazione liscia $\Phi : TS \rightarrow \mathbb{R}$, che ristretta a $T_p S$ è una forma quadratica definita positiva $\forall p \in S$.

Osservazione. Ciò significa che per ogni $p \in S$ l'espressione del prodotto scalare associato a Φ in una carta locale è data da una matrice simmetrica

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11}(x, y) & \varphi_{12}(x, y) \\ \varphi_{21}(x, y) & \varphi_{22}(x, y) \end{bmatrix}$$

dove le φ_{ij} sono funzioni lisce.

E' possibile dimostrare che ogni varietà differenziabile può essere resa varietà Riemanniana:

Teorema. *Sia S una varietà differenziabile liscia; allora su S esiste una metrica Riemanniana.*

Esempi.

1. \mathbb{R}^2 con il prodotto scalare canonico.
2. $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con il prodotto scalare dato dalla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Tale superficie è detta **Semipiano iperbolico**.

3. \mathbb{T} , il toro, visto come quoziente di \mathbb{R}^2 con la metrica indotta dal prodotto scalare di \mathbb{R}^2 ; tale superficie è detta **Toro piatto**.

Esempio. Le superfici Riemanniane a cui dedicheremo la maggior parte del corso sono le sottovarietà due dimensionali di \mathbb{R}^3 ; abbiamo visto che avere una sottovarietà due dimensionale S equivale ad avere una varietà differenziabile S' e un'embedding $F : S' \rightarrow \mathbb{R}^3$; Poichè F è un'embedding, il suo differenziale $d_p F$ è un'applicazione lineare iniettiva per ogni $p \in S'$, e quindi possiamo identificare $T_p S = d_p F(T_p S')$ con un sottospazio vettoriale di $T_p \mathbb{R}^3$.

Otteniamo perciò una metrica riemanniana su S restringendo agli spazi tangenti ad S l'usuale prodotto scalare di \mathbb{R}^3 definito sugli spazi tangenti a \mathbb{R}^3 .

A nuovi oggetti corrispondono nuovi isomorfismi:

Definizione. Un'isometria $F : (S, \varphi) \rightarrow (S', \varphi')$ è un diffeomorfismo tale che $\varphi'(dF(\mathbf{u}), dF(\mathbf{v})) = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p S$ per ogni p , cioè è un diffeomorfismo che induce isometrie di spazi vettoriali sugli spazi tangenti.

Vediamo ora come, utilizzando la metrica Riemanniana, possiamo fare misure su una superficie; sia φ la metrica Riemanniana su S , e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ una curva in S ; allora

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\varphi(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

L'angolo tra due curve $\alpha : I \rightarrow S$ e $\beta : I \rightarrow S$, che si tagliano per $t = t_0$ è dato da

$$\cos \theta = \frac{\varphi(\dot{\alpha}(t_0), \dot{\beta}(t_0))}{\|\dot{\alpha}(t_0)\| \|\dot{\beta}(t_0)\|}.$$

Un altro utilizzo della metrica è il calcolo di aree; supponiamo che $S' \subset S$ sia una regione contenuta nel dominio di una carta locale $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$, sia $P : \Omega \rightarrow S'$ l'inverso della carta locale, e siano \mathbf{P}_u e \mathbf{P}_v i vettori tangenti alle curve $P(u, \bar{v})$ e $P(\bar{u}, v)$; allora definiamo

$$A(S') = \iint_{\Omega} \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| du dv.$$

Giustificeremo in seguito questa formula nel caso di sottovarietà di \mathbb{R}^3 .

Definizione. Sia (S, φ) una superficie Riemanniana. Per ogni coppia di punti $x, y \in S$ si definisce $d(x, y)$ come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve C^1 a tratti che congiungono x a y .

Proposizione. *La funzione d è una distanza su S , e la topologia che induce è la topologia di S .*

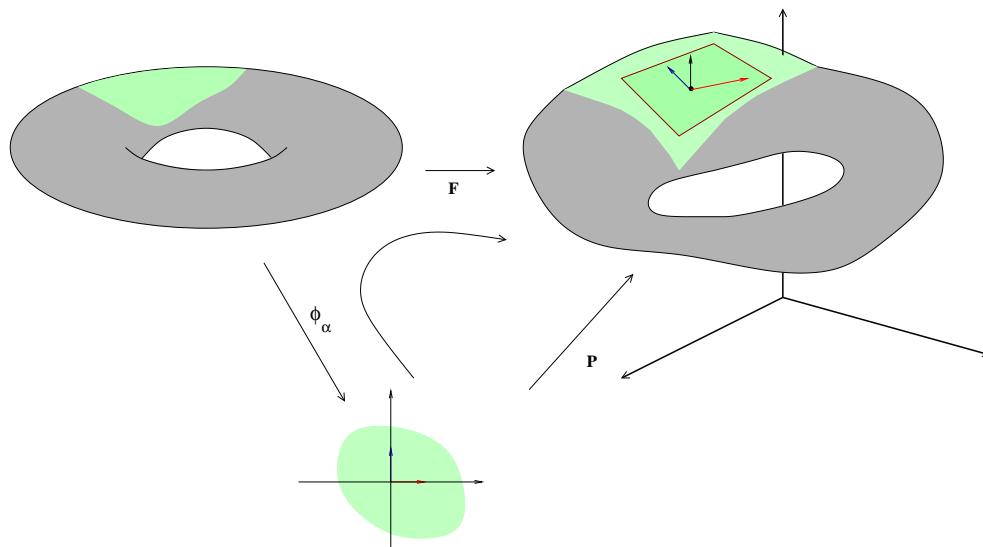
Osservazione. Tutte le quantità di cui abbiamo discusso finora dipendono solamente dalla metrica: non è necessario che una superficie sia immersa in \mathbb{R}^3 per poterle definire; tali quantità si conservano per isometrie.

Lo studio di queste quantità, e di altre che possono essere espresse solamente in funzione della metrica si chiama **geometria intrinseca**, ed è propria di tutte le superfici Riemanniane.

Invece ci sono altre quantità che possono essere definite solo per le sottovarietà di \mathbb{R}^3 , e dipendono dal modo in cui la superficie è immersa in \mathbb{R}^3 ; lo studio di questo secondo tipo di oggetti prende il nome di **geometria estrinseca**.

3.2 Superfici in \mathbb{R}^3 - prima forma fondamentale

L'oggetto principale del nostro studio d'ora in poi saranno le superfici sottovarietà di \mathbb{R}^3 ; Consideriamo perciò un'embedding $F : S' \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ e consideriamo una carta locale di S' , (U, \mathbf{x}) ; la composizione $F \circ \mathbf{x}^{-1}$ è un'embedding di un aperto di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 .



Questo motiva la seguente definizione

Definizione. Una superficie elementare è un'embedding $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove Ω è un aperto di \mathbb{R}^2 .

Osservazione. Sia $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione differenziabile; allora, a meno di restringere Ω , \mathbf{P} è una superficie elementare se e solo se $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v \neq \mathbf{0}$.

Sia $p \in S'$ un punto, e sia $T_p S'$ lo spazio tangente nel punto. Sappiamo che una base canonica di tale spazio è data dai vettori $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$.

Qual è l'immagine di questi vettori attraverso l'identificazione tra $T_p(S')$ con un sottospazio di $T_p \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$? Oppure, riformulando la domanda: chi è $dF\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)$?

Sia $[f] \in \mathcal{E}_{F(p)}$; il vettore $dF\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)$ agisce su $[f]$ in questo modo:

$$dF\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)([f]) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p ([f \circ F]) = \frac{\partial f \circ F \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial u_i}(\mathbf{x}(p)).$$

Siano ora $\gamma_u(t) = F \circ \mathbf{x}^{-1}(u_0 + t, v_0) = \mathbf{P}(u_0 + t, v_0)$ e $\gamma_v(t) = F \circ \mathbf{x}^{-1}(u_0, v_0 + t) = \mathbf{P}(u_0, v_0 + t)$ e consideriamo i vettori tangenti a queste curve, γ_{u*} e γ_{v*} .

Sappiamo che

$$\gamma_{u*}([f]) = \frac{d(f \circ \gamma_u)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(f \circ F \circ \mathbf{x}^{-1})}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial f \circ F \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial u}(\mathbf{x}(p))$$

Quindi i vettori della base canonica corrispondono ai vettori tangenti γ_{u*} e γ_{v*} ; nell'espressione locale della carta \mathbf{x} tali vettori non sono altro che \mathbf{P}_u e \mathbf{P}_v .

Scriviamo la matrice rappresentativa della metrica indotta su S da \mathbb{R}^3 rispetto alla base costituita da \mathbf{P}_u e \mathbf{P}_v :

$$G(u, v) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_v \\ \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_v \end{bmatrix}$$

Tale forma bilineare si chiama **prima forma fondamentale** di S . Utilizziamo la prima forma fondamentale per riscrivere la formula che dà l'area; ricordando che

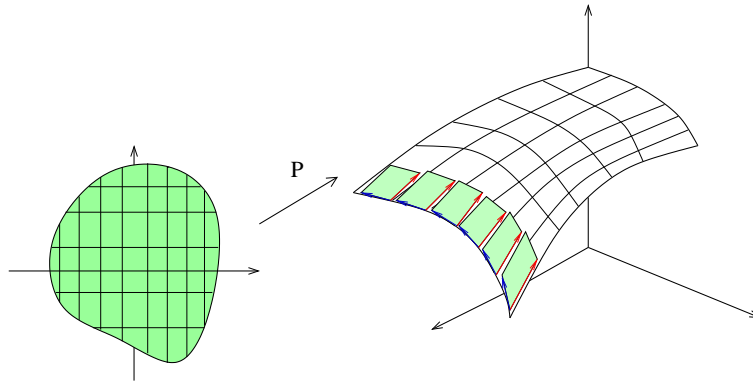
$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

otteniamo

$$A(S) = \iint_{\Omega} \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| dudv = \iint \sqrt{\det \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_v \\ \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{P}_v \end{bmatrix}} dudv = \iint \sqrt{\det G} dudv$$

Osservazione. Diamo un'idea per giustificare questa formula; suddividiamo l'aperto Ω in rettangolini, di area massima uguale a δ ; per ogni rettangolo R di vertici opposti $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ approssimiamo l'area di $\mathbf{P}(R)$ con l'area del parallelogrammo individuato da $\mathbf{P}(u_1, v_1), \mathbf{P}(u_2, v_1), \mathbf{P}(u_1, v_2)$, che è data da

$$\|(\mathbf{P}(u_2, v_1) - \mathbf{P}(u_1, v_1)) \wedge \mathbf{P}(u_1, v_2) - \mathbf{P}(u_1, v_1)\|.$$



Si può dimostrare che, se la regione $\mathbf{P}(\Omega)$ è limitata, allora, al tendere di δ a zero, esiste il limite della somma delle aree calcolate sui rettangolini, ed è uguale all'integrale indicato.

Esempio. Calcoliamo l'area della sfera di raggio unitario; non è possibile coprire tutta la sfera con una sola carta, quindi calcoleremo l'area di una semisfera e moltiplicheremo per 2.

Una semisfera di raggio unitario (poli esclusi) è parametrizzata nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{cases} \quad u \in (-\pi/2, \pi/2) \quad v \in [0, \pi]$$

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}, \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

E quindi la prima forma fondamentale è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{bmatrix}$$

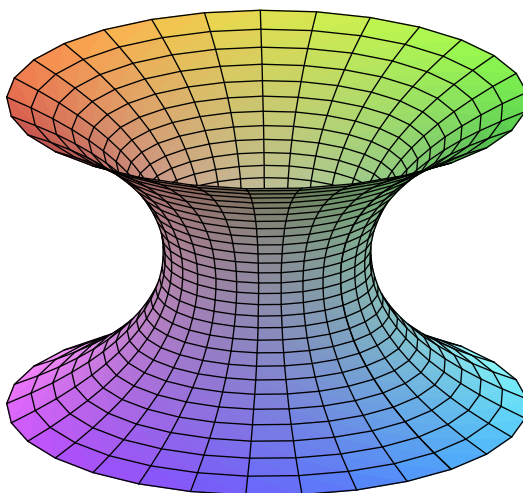
e il suo determinante è quindi $\cos^2 u$; quindi l'area della semisfera è

$$A(S) = \iint_{u,v \in \Omega} \sqrt{\det G} du dv = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos u| du = 2\pi$$

Esempi.

1. Il catenoide è la superficie descritta dalla seguente parametrizzazione:

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = \cosh u \sin v \\ z = u \end{cases}$$



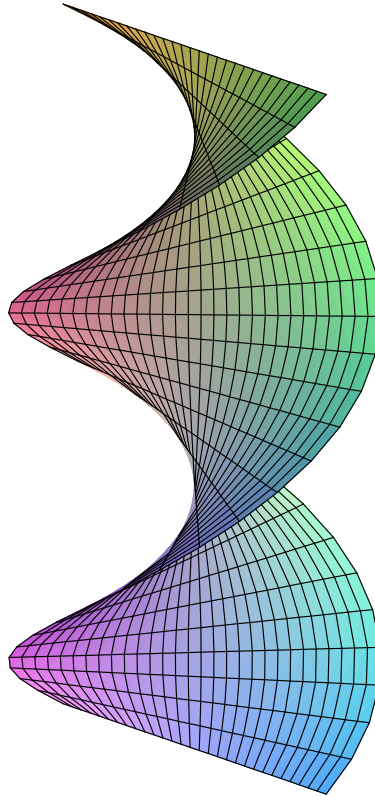
$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

E quindi la prima forma fondamentale è

$$g = \begin{bmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{bmatrix}$$

2. L'elicoide è la superficie descritta dalla seguente parametrizzazione

$$\begin{cases} x = U \cos V \\ y = U \sin V \\ z = V \end{cases}$$



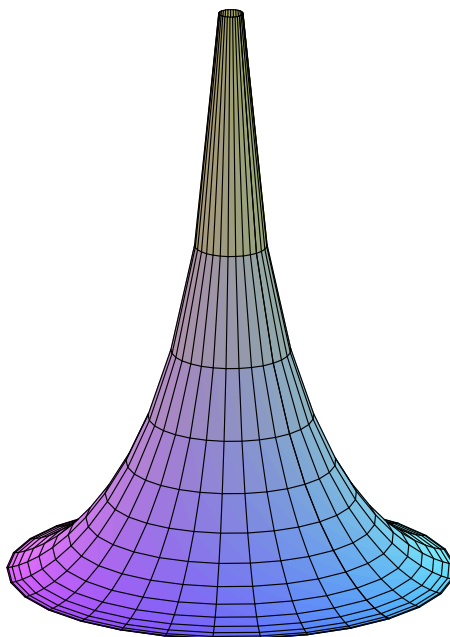
$$\mathbf{P}_U = \begin{bmatrix} \cos V \\ \sin V \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_V = \begin{bmatrix} -U \sin V \\ U \cos V \\ 1 \end{bmatrix}$$

E quindi la prima forma fondamentale è

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + U^2 \end{bmatrix}.$$

3. La pseudosfera è la superficie descritta dalla seguente parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u + \ln\left(\tan \frac{u}{2}\right) \end{cases} \quad u \in (\pi/2, \pi) \quad v \in (0, 2\pi).$$



La sua prima forma fondamentale è

$$G = \begin{bmatrix} \cot^2 u & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{bmatrix}.$$

Osservazione. Il catenoide e l'elicoide sono isometrici. Consideriamo il diffeomorfismo f

$$\begin{cases} U = \sinh u \\ V = v \end{cases}$$

Lo Jacobiano di f è dato da

$$J_f = \begin{bmatrix} \cosh u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e si verifica che $g = J_f^T G J_f$ e quindi

$$g(u, v) = u^T g v = u^T J_f^T G J_f v = G(df(u), df(v)).$$

Osservazione. Il semipiano iperbolico \mathbb{H} e la pseudosfera sono localmente isometrici. Consideriamo il diffeomorfismo f

$$\begin{cases} x = v \\ y = \frac{1}{\sin u} \end{cases}$$

Lo Jacobiano di f è dato da

$$J_f = \begin{bmatrix} -\frac{\cos u}{\sin^2 u} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e si verifica che $g = J_f^T G J_f$ e quindi

$$g(u, v) = u^T g v = u^T J_f^T G J_f v = G(df(u), df(v)).$$

3.3 Operatore forma e seconda forma fondamentale

Sia $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie elementare, sia $\langle \mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v \rangle$ la base canonica per lo spazio tangente ad S , e sia \mathbf{N} il versore normale, definito come

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v}{\|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\|}.$$

Definizione. La mappa di Gauss o mappa sferica di S è l'applicazione

$$\mathcal{S} : S \rightarrow \mathbf{S}^2$$

$$\mathbf{P}(u, v) \mapsto \mathbf{N}(u, v)$$

Osservazione.

- $d\mathcal{S}(\mathbf{P}_u) = \mathbf{N}_u$, $d\mathcal{S}(\mathbf{P}_v) = \mathbf{N}_v$.
- Se S è un piano, allora \mathcal{S} è costante.
- Se $S = \mathbf{S}^2$ allora \mathcal{S} è l'applicazione identica.

Fissiamo ora un punto $\bar{\mathbf{P}} \in S$ e osserviamo che c'è un isomorfismo tra $T_{\bar{\mathbf{P}}}S$ e $T_{\bar{\mathbf{N}}}\mathbf{S}^2$ pensati come sottospazi di \mathbb{R}^3 ; per questa ragione

$$L(\mathbf{v}) := -d\mathcal{S}(\mathbf{v})$$

è un endomorfismo dello spazio vettoriale $T_{\bar{\mathbf{P}}}S$, detto **operatore forma** o anche **operatore di Weingarten**; se $X = [x_{ij}]$ è la matrice di tale operatore rispetto alla base $\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v$ possiamo scrivere

$$L(\mathbf{v}) = X\mathbf{v};$$

in particolare avremo che $L(\mathbf{P}_u) = x_{11}\mathbf{P}_u + x_{21}\mathbf{P}_v$ e $L(\mathbf{P}_v) = x_{21}\mathbf{P}_u + x_{22}\mathbf{P}_v$ e quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= -x_{11}\mathbf{P}_u - x_{21}\mathbf{P}_v \\ \mathbf{N}_v &= -x_{12}\mathbf{P}_u - x_{22}\mathbf{P}_v.\end{aligned}$$

Proposizione. L è un endomorfismo autoaggiunto rispetto alla prima forma fondamentale, cioè

$$I(L(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = I(\mathbf{v}, L(\mathbf{w}))$$

Dim. Usiamo la base $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$. Dobbiamo mostrare che

$$I(L(\mathbf{P}_u), \mathbf{P}_v) = I(\mathbf{P}_u, L(\mathbf{P}_v)),$$

cioè che

$$I(-\mathbf{N}_u, \mathbf{P}_v) = I(\mathbf{P}_u, -\mathbf{N}_v);$$

essendo la prima forma fondamentale la restrizione del prodotto scalare di \mathbb{R}^3

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{P}_v = \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{P}_u.$$

Ricordiamo che $\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_u = 0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_v$ e deriviamo la prima uguaglianza rispetto a v e la seconda rispetto a u , ottenendo

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{P}_u &= -\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_{uv} \\ \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{P}_v &= -\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_{uv}\end{aligned}$$

e da qui la tesi. □

Corollario. Ponendo $II(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I(L(\mathbf{v}), \mathbf{w})$ si ottiene una forma bilineare simmetrica, detta II forma fondamentale.

Sia B la matrice associata a tale forma rispetto alla base $\{\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v\}$. Si ha che

$$\mathbf{v}^T B \mathbf{w} = II(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = I(L(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = I(\mathbf{v}, L(\mathbf{w})) = I(\mathbf{v}, X \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T G X \mathbf{w}$$

e quindi che

$$B = GX$$

Calcolo di B: Un modo per calcolare direttamente i coefficienti b_{ij} è il seguente: sappiamo che

$$b_{ij} = II(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j) = I(L(\mathbf{P}_i), \mathbf{P}_j) = -\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{P}_j;$$

derivando l'espressione $\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_i = 0$ troviamo che $\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{P}_j$, e quindi

$$b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N}$$

Esempio. Calcoliamo la II forma fondamentale del catenoide e dell'elicoide. Il catenoide ha equazioni

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = \cosh u \sin v \\ z = u \end{cases} .$$

La base canonica per lo spazio tangente è data da

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il versore normale è

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v}{\|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\|} = \begin{bmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ \sinh u \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\cosh u}$$

Calcoliamo le derivate seconde

$$\mathbf{P}_{uu} = \begin{bmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{uv} = \begin{bmatrix} -\sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{vv} = \begin{bmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, dalla formula $b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N}$ otteniamo

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

L'elicoide ha equazioni

$$\begin{cases} x = U \cos V \\ y = U \sin V \\ z = V \end{cases}$$

e quindi la base canonica dello spazio tangente è data da

$$\mathbf{P}_U = \begin{bmatrix} \cos V \\ \sin V \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_V = \begin{bmatrix} -U \sin V \\ U \cos V \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il versore normale

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{P}_U \wedge \mathbf{P}_V}{\|\mathbf{P}_U \wedge \mathbf{P}_V\|} = \begin{bmatrix} \sin V \\ -\cos V \\ U \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+U^2}}$$

Calcoliamo le derivate seconde

$$\mathbf{P}_{UU} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{UV} = \begin{bmatrix} -\sin V \\ \cos V \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{VV} = \begin{bmatrix} -U \cos V \\ -U \sin V \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, dalla formula $b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N}$ otteniamo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{-\sqrt{1+U^2}} \\ \frac{1}{-\sqrt{1+U^2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

3.4 Curvatura di Gauss e theorema egregium

La funzione $K(u, v) = \det X(u, v)$ è detta **curvatura di Gauss** di S .

Teorema. (*Theorema Egregium*) *La curvatura di Gauss $K(u, v)$ è una quantità intrinseca.*

Corollario. *Superfici isometriche hanno la stessa curvatura di Gauss*

Esempio. Calcoliamo la curvatura di Gauss del catenoide e dell'elicoide. La curvatura di Gauss del catenoide è

$$K = \det X = \frac{\det B}{\det G} = -\frac{1}{\cosh^4 u}$$

La curvatura di Gauss dell'elicoide è

$$K = \det X = \frac{\det B}{\det G} = -\frac{1}{(1 + U^2)^2}$$

Ricordando che un'isometria tra il catenoide e l'elicoide è data da

$$\begin{cases} U = \sinh u \\ V = v \end{cases}$$

verifichiamo che la curvatura di Gauss è invariante per isometrie.

3.4.1 Tipo di punti di una superficie

Sia $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie elementare; supponiamo che $(0, 0) \in \Omega$ e che $\mathbf{P}(0, 0) = (0, 0, 0)$; sviluppiamo \mathbf{P} in serie di Taylor

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{P}_u u + \mathbf{P}_v v + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{uu}u^2 + 2\mathbf{P}_{uv}uv + \mathbf{P}_{vv}v^2) + o(\sqrt{(u^2 + v^2)^2})$$

dove tutte le derivate sono calcolate in $(0, 0)$. La distanza dal piano tangente è data dalla proiezione sul versore normale, e quindi

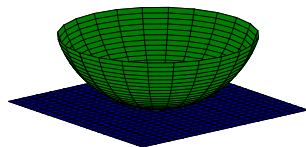
$$d(\mathbf{P}, \pi) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{uu}u^2 + 2\mathbf{P}_{uv}uv + \mathbf{P}_{vv}v^2) \cdot \mathbf{N} + \dots$$

derivando l'espressione $\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_i = 0$ troviamo che $\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{P}_j$, e quindi $b_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{N}$; ne segue che

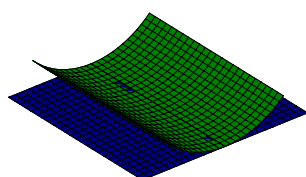
$$d(\mathbf{P}, \pi) = \frac{1}{2}(b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2) + \dots$$

Supponiamo che $B \neq 0$ (altrimenti chiamiamo il punto **punto piatto**) e vediamo come si comporta l'approssimazione al second'ordine della superficie.

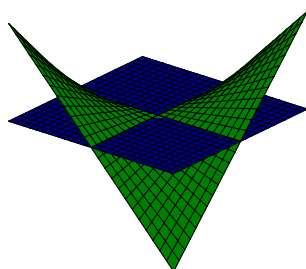
Se $\frac{\Delta}{4} = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} < 0$ l'espressione non cambia mai di segno, la superficie rimane, in un intorno di $(0, 0, 0)$ dalla stessa parte del piano tangente, tagliandolo solo nel punto di tangenza. Un tale punto è detto **punto ellittico**.



Se $\frac{\Delta}{4} = 0$ la superficie rimane dalla stessa parte del piano tangente, ma lo taglia lungo una retta. Abbiamo un **punto parabolico**.



Se $\frac{\Delta}{4} > 0$ la superficie taglia il piano tangente lungo due rette, e non giace dalla stessa parte rispetto ad esso. Tale tipo di punto è detto **punto iperbolico**.



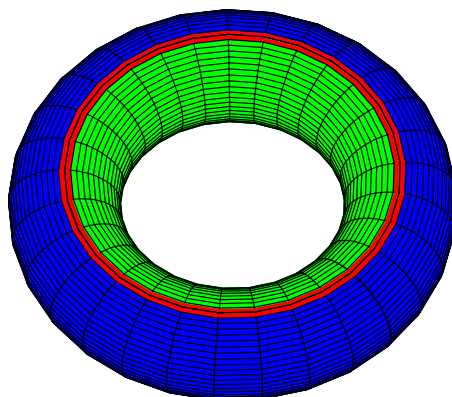
NOTA BENE: Le figure e la discussione si riferiscono SOLO all'approssimazione al second'ordine della superficie. Riprenderemo il discorso generale più avanti.

Osserviamo che $\frac{\Delta}{4} = -\det B = -\det(GX) = -\det G \det X$ e, ricordando che $\det G > 0$ troviamo che possiamo leggere la natura dei punti dal segno della curvatura di Gauss

$$\begin{aligned} K > 0 & \text{ Punti ellittici} \\ K = 0 & \text{ Punti parabolici} \\ K < 0 & \text{ Punti iperbolic} \end{aligned}$$

Osserviamo che nella stessa superficie possono essere presenti punti di natura diversa; se sono presenti punti ellittici e punti iperbolic, essi sono separati da curve di punti parabolici, dette **linee paraboliche**, individuate dall'equazione

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$$



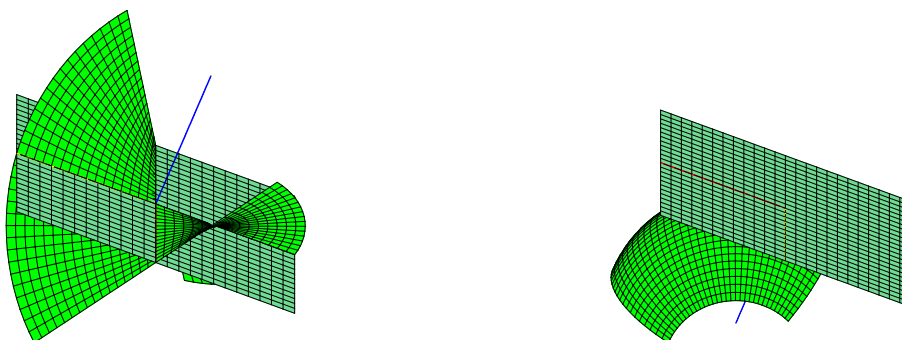
3.4.2 Interpretazione geometrica della curvatura di Gauss

Consideriamo nuovamente la mappa di Gauss

$$\mathcal{S} : S \rightarrow \mathbf{S}^2.$$

Il versore normale a S in \mathbf{P} ha la stessa direzione del versore normale a \mathbf{S}^2 in \mathbf{N} , mentre il verso può essere concorde o discorde, e questo dipende dal segno della curvatura di Gauss della superficie; infatti poichè $\mathbf{N}_u = -L(\mathbf{P}_u)$ e $\mathbf{N}_v = -L(\mathbf{P}_v)$ si ha che

$$\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v = L(\mathbf{P}_u) \wedge L(\mathbf{P}_v) = (\det X)\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v.$$



Fissiamo ora un punto $\mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v}) \in S$; scegliamo una regione Ω che contiene (\bar{u}, \bar{v}) , calcoliamo l'area delle regioni Ω_S e Ω_N , immagini di Ω tramite \mathbf{P} e $\mathcal{S} \circ \mathbf{P}$, poniamo $\varepsilon = \text{signum}(K(\bar{u}, \bar{v}))$ e studiamo il limite del seguente rapporto al restringersi di Ω :

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \varepsilon \frac{A_{\Omega_N}}{A_{\Omega_S}} = \varepsilon \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\iint \|\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\| dudv}{\iint \|\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v\| dudv};$$

si può provare che

$$\varepsilon \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{A_{\Omega_N}}{A_{\Omega_S}} = \det X(\bar{u}, \bar{v}) := K(\bar{u}, \bar{v}).$$

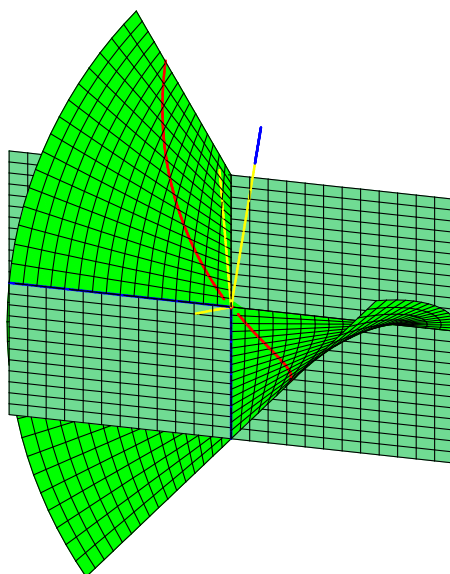
3.5 Curvature

Sia $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie elementare, sia $\langle \mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v \rangle$ la base canonica per lo spazio tangente ad S , e sia \mathbf{N} il versore normale.

Sia $\gamma : I \rightarrow \Omega \rightarrow S$ una curva su S , con parametrizzazione naturale, e sia $\mathbf{k} = \kappa \mathbf{n}$ il vettore curvatura di γ . Decomponiamo tale vettore nella parte tangente ad S e nella parte normale ad S :

$$\mathbf{k} = k_n \mathbf{N} + \mathbf{k}_g$$

La parte normale del vettore curvatura è detta **vettore curvatura normale**, mentre la parte tangente è detta **vettore curvatura geodetica**.



3.5.1 Curvatura normale

Proposizione. *La curvatura normale dipende solo dalla direzione del vettore tangente a γ , e si ha*

$$k_n = II(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{t}_\gamma)$$

Dim. Le equazioni di γ sono $\gamma(s) = \mathbf{P}(u(s), v(s))$, quindi $\mathbf{t}_\gamma = \dot{\gamma}(s) = \mathbf{P}_u u' + \mathbf{P}_v v'$, e quindi le componenti di \mathbf{t}_γ sulla base canonica dello spazio tangente sono (u', v') .

Il vettore curvatura di γ è

$$\mathbf{k} = \dot{\gamma}''(s) = \mathbf{P}_u u'' + \mathbf{P}_v v'' + \mathbf{P}_{uu} u'^2 + 2\mathbf{P}_{uv} u'v' + \mathbf{P}_{vv} v'^2$$

e quindi la sua componente normale è

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = b_{11} u'^2 + 2b_{12} u'v' + b_{22} v'^2 = II(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{t}_\gamma).$$

e abbiamo mostrato la tesi. □

Osservazione. Se la curva non ha la parametrizzazione naturale si può mostrare che

$$k_n = \frac{II(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}{I(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}$$

Sia $\mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v})$ un punto della traccia di S ; un piano normale ad S in $\mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v})$ è un qualsiasi piano H passante per $\mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v})$ e parallelo a \mathbf{N} .

La curva $H \cap S$, con parametro naturale, è detta **sezione normale** di S ; per una tale curva (piana) si ha $\mathbf{n} = \pm \mathbf{N}$ e quindi la curvatura normale di una sezione normale è in modulo uguale alla curvatura della curva, e ha segno positivo o negativo a seconda che \mathbf{n} e \mathbf{N} siano o meno equiversi.

Quindi ad ogni direzione tangente associamo una curvatura, la **curvatura normale**, che ha il significato geometrico di essere la curvatura di una sezione normale.

3.5.2 Curvature principali - Direzioni principali

Identificando l'insieme delle direzioni tangenti a un punto della superficie con \mathbf{S}^1 possiamo costruire un'applicazione

$$k_n : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni direzione associa la sua curvatura normale; poiché \mathbf{S}^1 è compatto, tale funzione assume massimo e minimo.

I valori k_1 e k_2 di massimo e di minimo sono detti **curvature principali** di S in $\mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v})$; se k_n non è costante (se è costante il punto è detto **umbilico**) k_1 e k_2 corrispondono a due direzioni, dette **direzioni principali** di S in $\mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v})$.

Teorema. *Se $\bar{\mathbf{P}}$ non è un punto umbilico le curvature principali sono gli autovalori di L , e le direzioni principali sono le direzioni degli autovettori di L e sono quindi ortogonali tra loro.*

Dim. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormale di $T_{\bar{\mathbf{P}}}S$ tale che \mathbf{e}_1 sia una direzione principale, con curvatura principale k_1 ; sia $k_2 = k_n(\mathbf{e}_2) = II(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$ e $k_{12} = II(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ e sia $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \sin \theta$ il generico versore tangente.

$$k_n(\mathbf{e}_\theta) = II(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta) = k_1 \cos^2 \theta + 2k_{12} \sin \theta \cos \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

Calcolando la derivata rispetto a θ

$$(k_n)_\theta = 2 \cos \theta \sin \theta (k_2 - k_1) + 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) k_{12};$$

quindi, poichè $k_1 = k_n(0)$ è un valore di massimo, si ha $k_{12} = 0$, che implica che $k_2 = k_n(\pi/2)$ è il valore di minimo.

Inoltre $I(L(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2) = II(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = k_{12} = 0$ e quindi $L(\mathbf{e}_1)$ è ortogonale a \mathbf{e}_2 , e quindi $L(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1$; ma $\lambda_1 = I(L(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1) = II(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = k_1$; ne segue che $L(\mathbf{e}_1) = k_1 \mathbf{e}_1$. Analogamente si mostra che $L(\mathbf{e}_2) = k_2 \mathbf{e}_2$. \square

Dal teorema segue che

$$k_1 k_2 = \det X = K \text{ curvatura di Gauss}$$

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{Tr X}{2} = H \text{ curvatura media}$$

In particolare questo significa che in un punto ellittico le curvature principali sono concordi, e quindi tutte le curvature normali sono concordi. Segue che, in un intorno del punto, la superficie non tocca il piano tangente e rimane tutta dalla stessa parte rispetto ad esso.

In un punto iperbolico invece le curvature principali sono discordi, e quindi in ogni intorno del punto la superficie attraversa il piano tangente.

In un punto parabolico una delle curvature principali è nulla; la superficie può attraversare o meno il piano tangente in un intorno del punto.

Esempio. Calcoliamo le curvature principali dell'elicoide.

Abbiamo visto che

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi, ricordando che $X = G^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)^3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di L sono quindi $k_{1,2} = \mp \frac{1}{1+u^2}$, che rappresentano le curvature principali.

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

$$H = 0$$

Le superfici che, come l'elicoide hanno curvatura media nulla, si dicono **superfici minimali**.

Definizione. Una curva su una superficie che ha la proprietà di essere tangente in ogni punto ad una direzione principale è detta **linea di curvatura**

Le linee di curvatura si trovano (non lo dimostriamo) risolvendo l'equazione differenziale

$$x_{21}\gamma_u^2 + (x_{22} - x_{11})\gamma_u\gamma_v - x_{12}\gamma_v^2 = 0.$$

Osservazione. Se la matrice X è diagonale, allora le **linee coordinate**, cioè le curve del tipo $\mathbf{P}(u, v_0)$, $\mathbf{P}(u_0, v)$ sono linee di curvatura.

3.5.3 Direzioni e linee asintotiche

Definizione. Una direzione $v \in T_p S$ si dice **asintotica** se è autoconiugata, cioè se $II(v, v) = 0$; equivalentemente le direzioni asintotiche sono quelle con curvatura normale nulla.

Osservazione. In un punto ellittico non ci sono direzioni asintotiche, in un punto parabolico ce n'è una sola, e in un punto iperbolico ce ne sono due.

Definizione. Una curva su una superficie che ha la proprietà di essere tangente in ogni punto ad una direzione asintotica è detta **linea asintotica**.

Osservazione. Le linee asintotiche esistono solo dove $K \leq 0$; le linee paraboliche possono essere asintotiche (se corrispondono alla direzione di curvatura nulla, come nel caso del toro), oppure no.

3.6 Geodetiche

Definizione. Una curva $\gamma : I \rightarrow \Omega \rightarrow S$ si dice **geodetica** se $\ddot{\gamma}(t)$ è parallelo a $\mathbf{N}(u(t), v(t))$.

Osservazione. In particolare, se γ è parametrizzata con il parametro naturale, la condizione è equivalente ad avere vettore curvatura geodetica nullo.

Osservazione. Se γ è una geodetica, allora $\|\dot{\gamma}\|$ è costante.

Infatti, poichè $\dot{\gamma}$ è tangente a S , si ha $\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = 0$, e quindi $\frac{d}{dt}(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) = 0$.

Vediamo ora come si trovano le geodetiche. Sia $\gamma : I \rightarrow \Omega \rightarrow S$ una curva su S ; consideriamo la componente tangente di $\ddot{\gamma}$

$$\ddot{\gamma} = \mathbf{P}_u \ddot{u} + \mathbf{P}_v \ddot{v} + \mathbf{P}_{uu} \dot{u}^2 + 2\mathbf{P}_{uv} \dot{u} \dot{v} + \mathbf{P}_{vv} \dot{v}^2$$

Per far questo introduciamo i simboli di Christoffel; tali simboli sono definiti dalla seguente relazione:

$$\mathbf{P}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{P}_u + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{P}_v + b_{ij} \mathbf{N}$$

Scriviamo quindi

$$\ddot{\gamma} = \sum_k \mathbf{P}_k \ddot{u}_k + \sum_{i,j} \mathbf{P}_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j$$

e, utilizzando i simboli di Christoffel,

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} &= \sum_k \mathbf{P}_k \ddot{u}_k + \sum_{i,j} \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{P}_k + b_{ij} \mathbf{N} \right) \dot{u}_i \dot{u}_j \\ \ddot{\gamma} &= \sum_k (\ddot{u}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j) \mathbf{P}_k + \sum_{ij} b_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j \mathbf{N} \end{aligned}$$

Quindi la parte tangente di $\ddot{\gamma}$ è data da

$$\sum_k (\ddot{u}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j) \mathbf{P}_k.$$

Osservazione. I simboli di Christoffel sono quantità intrinseche; si possono cioè esprimere in funzione dei coefficienti della prima forma fondamentale e delle loro derivate. Non vediamo la formula generale, ma ci limitiamo ad un caso particolare: se la prima forma fondamentale è diagonale, allora si ha

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{P}_k}{g_{kk}};$$

ad esempio, per la sfera si ha che $\Gamma_{12}^2 = -\frac{\sin(u)}{\cos(u)}$, $\Gamma_{22}^1 = \sin(u) \cos(u)$ e gli altri coefficienti sono nulli.

Per i calcoli precedenti, troviamo che il sistema di equazioni differenziali le cui soluzioni sono le geodetiche è il seguente:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 = 0 \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 = 0 \end{cases} .$$

Poiché i coefficienti di tale sistema sono quantità intrinseche, anche la nozione di geodetica è una nozione intrinseca; in particolare un'isometria porta geodetiche in geodetiche.

Da risultati generali sulle equazioni differenziali abbiamo il

Teorema. (*Esistenza e unicità locale delle geodetiche*) Per ogni punto $p_0 \in S$ esistono un intorno U e un $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $p \in U$ e per ogni $v \in T_p S$ con $\|v\| \leq \varepsilon$ esiste un'unica geodetica $\gamma_v : (-1, 1) \rightarrow S$ tale che $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

Corollario. Fissato un punto $p \in S$ e un versore tangente $\mathbf{v} \in T_p S$ esiste un'unica geodetica parametrizzata con parametro naturale passante per p che ha \mathbf{v} come versore tangente.

Dim. Per il teorema esiste $\varepsilon > 0$ e un'unica geodetica $\gamma(t)$ passante per p tale che $\dot{\gamma}(t) = \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{v}$. La curva $\gamma_{\mathbf{v}}(s) = \gamma(\frac{2s}{\varepsilon})$ è la geodetica cercata. \square

Le geodetiche localmente minimizzano la distanza, nel senso che

Teorema. Per ogni $p \in S$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di p tale che ogni coppia di punti $x, y \in U$ è congiunta da una geodetica γ_v di lunghezza $< \varepsilon$ con la proprietà che $l(\gamma_v) = d(x, y)$.

Osservazione.

- Ciò non significa che una geodetica minimizzi sempre la distanza tra due suoi punti (sfera).
- In generale, dati due punti di una superficie S , non è detto che esista una geodetica che li congiunga ($\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$).

Non è detto che le geodetiche costruite localmente possano essere indefinitamente estese; se questo succede per ogni punto di S , allora S si dice **geodeticamente completa**. Sussiste il seguente

Teorema. (*Hopf-Rinow*) Se S è geodeticamente completa allora ogni coppia di punti può essere congiunta da una geodetica minimale.

Corollario. Sono equivalenti i seguenti fatti:

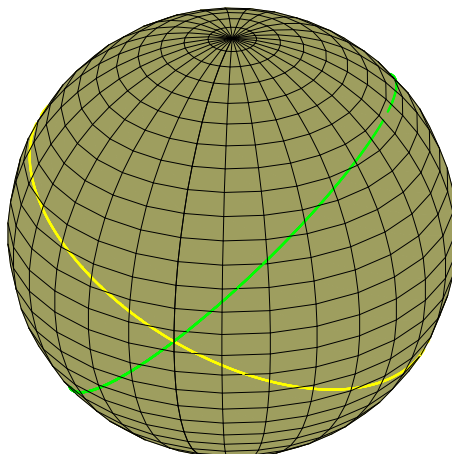
1. S è geodeticamente completa.
2. Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di S è compatto.
3. Lo spazio metrico (S, d) è completo.

Esempi.

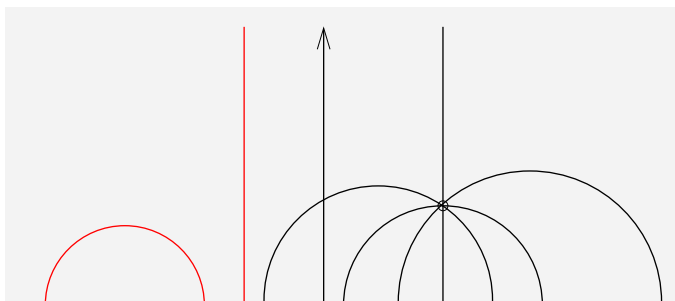
1. Le geodetiche della sfera sono i cerchi massimi; infatti le equazioni delle geodetiche per la sfera sono le seguenti:

$$\begin{cases} u'' + \sin(u) \cos(u) v'^2 = 0 \\ v'' - 2 \frac{\sin(u)}{\cos(u)} u' v' = 0 \end{cases},$$

da cui si vede che i meridiani ($v = v_0$) sono geodetiche. D'altra parte per ogni cerchio massimo C esiste un'isometria della sfera che porta un meridiano in C e per ogni punto p ed ogni direzione tangente v esiste un cerchio massimo passante per p e avente v come direzione tangente.



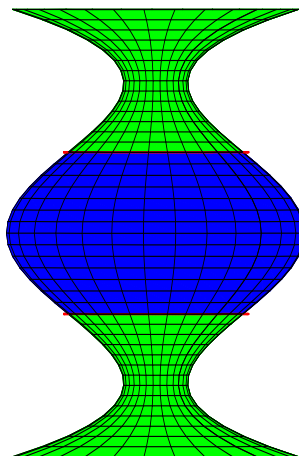
2. Le geodetiche del piano euclideo sono le rette.
3. Le geodetiche del semipiano iperbolico sono le rette verticali e le semicirconferenze con centro sull'asse delle ascisse, opportunamente parametrizzate.



3.7 Superfici di rotazione

Sia $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva contenuta nel piano $y = 0$, di equazioni $x = f(u), z = u$, $f > 0$, e consideriamo la superficie ottenuta facendo ruotare tale curva attorno alla retta $x = y = 0$, che avrà equazioni

$$\begin{cases} x = f \cos v \\ y = f \sin v \\ z = u \end{cases} .$$



La base canonica per lo spazio tangente è data da

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} f' \cos v \\ f' \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} -f \sin v \\ f \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il versore normale è

$$\begin{bmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ f' \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

La matrice della prima forma fondamentale è

$$G = \begin{bmatrix} f'^2 + 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo le derivate seconde

$$\mathbf{P}_{uu} = \begin{bmatrix} f'' \cos v \\ f'' \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{uv} = \begin{bmatrix} -f' \sin v \\ f' \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{vv} = \begin{bmatrix} -f \cos v \\ -f \sin v \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice B si scrive quindi

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{f}{\sqrt{1+f'^2}} \end{bmatrix}$$

La curvatura di Gauss è quindi

$$K = \det X = \frac{\det B}{\det G} = -\frac{f''}{f} \frac{1}{(1+f'^2)^2}$$

e ha quindi il segno opposto alla derivata seconda di f .

Osserviamo che, per una superfici di rotazione la matrice X è diagonale

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{f''}{\sqrt{(1+f'^2)^3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f\sqrt{1+f'^2}} \end{bmatrix}$$

e quindi le linee coordinate sono linee di curvatura.

3.8 Superfici rigate

Una superficie che ammette una parametrizzazione della forma

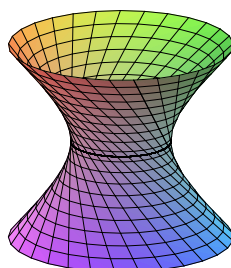
$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{Q}(u) + v\mathbf{L}(u)$$

è una superficie rigata (possiamo supporre che \mathbf{L} sia un versore).

Esempi.

1.

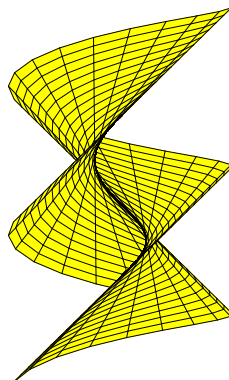
$$\begin{cases} x = \cos u - v \sin u \\ y = \sin u + v \cos u \\ z = v \end{cases} .$$



Iperboloide rigato

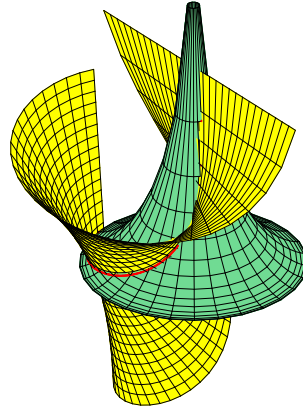
2. Se γ è una curva nello spazio, con parametrizzazione naturale, la rigata delle tangenti a questa curva è la superficie $\mathbf{P}(u, v) = \gamma(u) + v\gamma'(u)$.

$$\begin{cases} x = \cos u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \sin u \\ y = \sin u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \cos u \\ z = u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases} .$$



Rigata delle tangenti a un'elica cilindrica

3. Se γ è una curva su una superficie S , la rigata delle normali ad S lungo γ è la superficie $\mathbf{P}(s, t) = \gamma(s) + t\mathbf{N}(\gamma(s))$.



Rigata delle normali alla pseudosfera lungo una curva

3.8.1 Rigate Sviluppabili

Definizione. Una famiglia di piani ad un parametro è una famiglia

$$(\mathbf{P}(x, y, z) - \alpha(t)) \cdot \mathbf{n}(t) = 0$$

con \mathbf{n} versore tale che $\dot{\mathbf{n}} \neq 0$.

L'involuppo della famiglia (cioè una superficie che in ogni punto ha un piano della famiglia come piano tangente) si ottiene dalle equazioni

$$\begin{cases} (\mathbf{P} - \alpha) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ (\mathbf{P} - \alpha) \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0 \end{cases}$$

la seconda equazione si ottiene derivando la prima e osservando che $\dot{\alpha}$ sta nel piano tangente a S , e quindi $\dot{\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Per ogni valore di t questa è l'equazione di una retta di direzione $\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{n}}$.

Una tale superficie è quindi rigata, ed è detta **rigata sviluppabile**.

Proposizione. Una rigata sviluppabile è una parte di piano, un cono, un cilindro o la rigata delle tangenti ad una curva.

Dim. Cerchiamo una curva $\beta(t)$ sulla superficie alla quale tutte le rette siano tangenti; se esiste, essa è tale che $\beta(t) \parallel \mathbf{n}(t) \wedge \dot{\mathbf{n}}(t)$, quindi soddisfa $\dot{\beta} \cdot \mathbf{n} = \dot{\beta} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0$ e perciò

$$\begin{cases} \beta(t) \cdot \mathbf{n} = \alpha(t) \cdot \mathbf{n}(t) = \delta(t) \\ \beta(t) \cdot \dot{\mathbf{n}} = \dot{\delta}(t) \\ \beta(t) \cdot \ddot{\mathbf{n}} = \ddot{\delta}(t) \end{cases}$$

Se il determinante della matrice le cui righe sono $\mathbf{n}, \dot{\mathbf{n}}, \ddot{\mathbf{n}}$ è diverso da zero, si trova la curva β (che può eventualmente essere un solo punto), e quindi la superficie è una **rigata delle tangenti** oppure un **cono**. Altrimenti o il rango della matrice è due, \mathbf{n} appartiene ad un piano π , $\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{n}}$ ha direzione costante perpendicolare a π e la rigata è un **cilindro** o il rango della matrice è uno, \mathbf{n} è costante e S è una parte di piano. □

Proposizione. Una superficie rigata è sviluppabile sse $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{L}} = 0$.

Dim. La direzione normale ad una rigata è data da $\mathbf{P}_u \wedge \mathbf{P}_v = \dot{\mathbf{Q}} \wedge \mathbf{L} + v\dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L}$. Se la rigata è sviluppabile, la direzione normale non cambia lungo una retta della rigatura, perciò $\dot{\mathbf{Q}} \wedge \mathbf{L} \parallel \dot{\mathbf{L}} \wedge \mathbf{L}$ e quindi $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{L}} = 0$.

Viceversa, se $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{L}} = 0$, ci sono due possibilità: o $\dot{\mathbf{L}} = 0$ e la rigata è un cilindro, oppure $\dot{\mathbf{Q}} = x\dot{\mathbf{L}} + y\ddot{\mathbf{L}}$.

In questo secondo caso poniamo $\beta = \mathbf{Q} - y\mathbf{L}$ e riparametriamo la superficie nel modo seguente:

$$\mathbf{P}(u, v) = \beta(u) + v\mathbf{L};$$

poichè $\dot{\beta} = (x - y)\dot{\mathbf{L}}$, il versore tangente a β è \mathbf{L} , e quindi \mathbf{P} è la rigata delle tangenti alla curva β . \square

Corollario. Una superficie rigata sviluppabile ha curvatura gaussiana nulla.

Dim. Abbiamo che $\mathbf{P}_{uu} = \ddot{\mathbf{Q}} + v\ddot{\mathbf{L}}$, $\mathbf{P}_{uv} = \dot{\mathbf{L}}$ e $\mathbf{P}_{vv} = 0$; dalla condizione di sviluppabilità segue che $b_{12} = 0$ e quindi

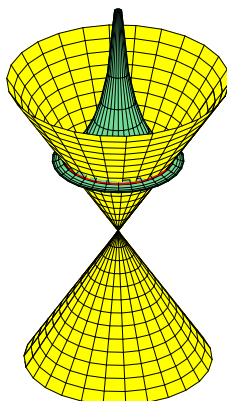
$$B = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una conseguenza importante è che le rigate sviluppabili sono localmente isometriche al piano. Sussiste infatti il

Teorema. Due superfici regolari con curvatura gaussiana costante ed uguale sono localmente isometriche.

Proposizione. Una curva γ su S è una linea di curvatura se e solo se la rigata delle normali a S lungo γ è sviluppabile.

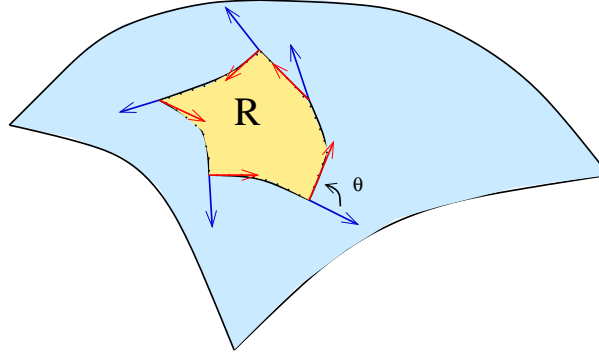
Dim. La rigata delle normali a S lungo γ ha equazioni $\mathbf{P}(s, t) = \gamma(t) + s(\mathbf{N}(\gamma(t)))$, ed è quindi sviluppabile se e solo se $\dot{\gamma} \cdot \mathbf{N} \wedge \dot{\mathbf{N}} = 0$; poichè $\dot{\gamma}$ e $\dot{\mathbf{N}}$ giacciono nel piano ortogonale a \mathbf{N} la condizione di sviluppabilità è verificata se e solo se $\dot{\gamma} \parallel \dot{\mathbf{N}}$; osserviamo inoltre che, se $\dot{\gamma} = \mathbf{P}_u u' + \mathbf{P}_v v'$, allora $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v' = -L(\dot{\gamma})$, quindi la rigata è sviluppabile se e solo se $L(\dot{\gamma}) \parallel \dot{\gamma}$, cioè se e solo se $\dot{\gamma}$ è una direzione principale. \square



Rigata delle normali alla pseudosfera lungo una linea di curvatura

3.9 Teorema di Gauss-Bonnet

Sia S una superficie in \mathbb{R}^3 ; una regione semplice è un sottoinsieme $R \subset S$ omeomorfo a \mathbf{D}^2 , tale che il suo bordo sia la traccia di una curva chiusa semplice e regolare a tratti e contenuto nel dominio di una carta locale (U, φ) . Siano $\theta_1, \dots, \theta_k$ gli angoli formati dai vettori tangenti ad α nei suoi vertici.



Teorema. (*Gauss-Bonnet versione locale*)

$$\iint K + \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} k_g + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi$$

Consideriamo su S un **triangolo geodetico**, cioè un triangolo i cui lati sono archi di geodetica, e applichiamo ad esso il teorema di Gauss-Bonnet; gli angoli formati dai vettori tangenti nei vertici corrispondono agli angoli esterni del triangolo, perciò, se α, β e γ sono gli angoli del triangolo avremo

$$\iint K + 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi$$

e quindi

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint K d\sigma$$

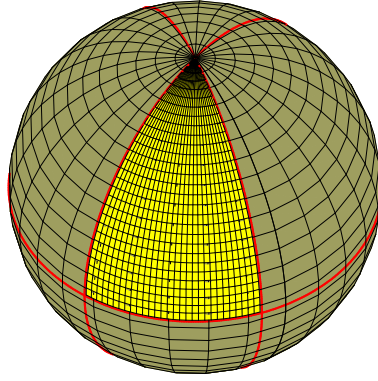
Ad esempio, su una sfera di raggio unitario (curvatura di Gauss costante e uguale a uno)

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A(T)$$

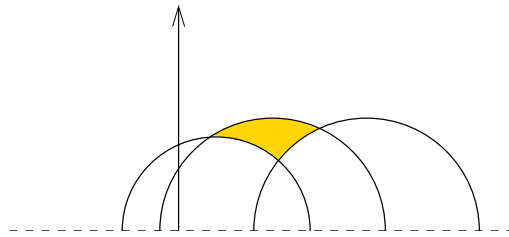
dove T è l'area del triangolo, e quindi la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è maggiore di π , mentre sul semipiano iperbolico (curvatura di Gauss costante e uguale a -1)

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A(T)$$

e quindi la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è minore di π .



Triangolo geodetico sulla sfera



Triangolo geodetico sul semipiano iperbolico

3.9.1 la caratteristica di Eulero di una superficie

Sia S una superficie (topologica) compatta triangolata; siano V il numero di vertici, E il numero di spigoli e F il numero di facce dei triangoli della triangolazione. La caratteristica di Eulero di S è il numero

$$\chi(S) = V - E + F;$$

si può dimostrare che tale numero dipende solo dalla classe di omeomorfismo della superficie S , e non dalla triangolazione scelta e che, se $S \simeq T_g$ allora $\chi(S) = 2 - 2g$, mentre se $S \simeq U_h$ allora $\chi(S) = 2 - h$.

Teorema. (Gauss-Bonnet versione globale) $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie (orientabile) compatta di genere g ; allora

$$\iint K = 2\pi(2 - 2g)$$

Diamo un'idea di come si possa passare dal teorema locale a quello globale; consideriamo una triangolazione coerentemente orientata di S , applichiamo il teorema locale ad ogni triangolo e sommiamo

$$\iint K + \sum \int_{\gamma_{ik}} k_g + \sum \theta_{ik} = 2\pi F \quad k = 1, \dots, 3 \quad i = 1, \dots, F$$

Gli integrali sul bordo dei triangoli si cancellano, poichè consideriamo orientazioni opposte sugli spigoli comuni, quindi

$$\iint K = 2\pi F - \sum \theta_{ik}$$

Mostriamo ora che

$$\sum \theta_{ik} = 2\pi E - 2\pi V$$

Infatti, sommando prima su ogni triangolo abbiamo che

$$\sum \theta_{ik} = \sum_F (3\pi - \varphi_{ik});$$

Inoltre, si ha che $3F = 2E$ e che $\sum \varphi_{ik} = 2\pi V$; quindi concludiamo che

$$\iint K = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$$

