Geometria IV u.d. 18 novembre 2003

1) Sulla retta reale $\mathbb{R}$ si consideri la famiglia di sottoinsiemi τ così definita:

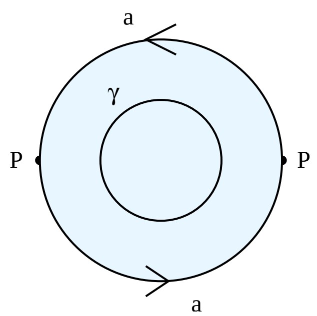
$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R} \text{ t.c. } U^c \text{ è un insieme finito, oppure } 0 \notin U\}$$

- Si verifichi che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.
- Si stabilisca se $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto, connesso, di Hausdorff.

2) Sia $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea, e sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme chiuso e non vuoto.

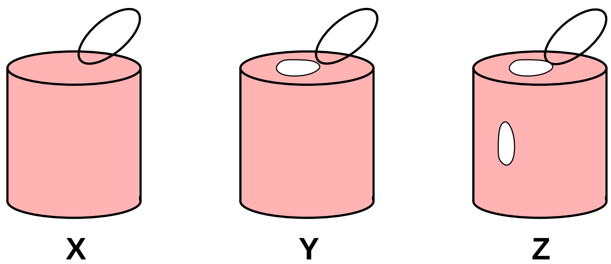
- Si dimostri che $\mathbb{R}/A$ è uno spazio di Hausdorff.
- Si dimostri che, se $\mathbb{R}/A$ è compatto, allora A non è compatto.
- Se A è illimitato, $\mathbb{R}/A$ è necessariamente compatto?

3) Sia $\mathbb{RP}^2$ il piano proiettivo reale e sia $\gamma \simeq \mathbf{S^1} \subset \mathbb{RP}^2$ come in figura.



Si stabilisca se γ è un retratto e/o un retratto di deformazione di $\mathbb{RP}^2$.

4) Si considerino i seguenti spazi topologici: X è la lattina chiusa (vuota), Y è la lattina aperta (vuota), Z è la lattina aperta e bucata (vuota)



e se ne calcolino i gruppi fondamentali.