Gianluca Occhetta

Note di Geometria

IV unità didattica

Università di Trento
Dipartimento di Matematica
Via Sommarive 14
38050 - Povo (TN)

Prefazione

Le presenti note riassumono gli argomenti trattati nel corso di Geometria IV unità didattica; come tali non vogliono in alcun modo sostituire i libri di testo e gli appunti, ma essere una guida per ritrovare su di essi gli argomenti svolti; spesso le dimostrazioni sono ridotte all'osso, e gli esempi vengono elencati senza la discussione che ne viene fatta a lezione; inoltre tali note non sono probabilmente esenti da errori e omissioni. Sarò grato a chi me ne segnalerà.

Trento,
Maggio 2003

Gianluca Occhetta

Indice

Parte I

Topologia generale

1

Spazi topologici

1.1 Generalità

Definizione. Sia X un insieme e τ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che

1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
2. τ è chiusa rispetto all'unione; cioè, data una collezione $\{U_j\}_{j\in J}$ con $U_j \in \tau \quad \forall j$ si ha che $\bigcup U_j \in \tau$.
3. τ è chiusa rispetto alle intersezioni finite; cioè, se $U_1, U_2 \in \tau$ allora $U_1 \bigcap U_2 \in \tau$.

La coppia (X, τ) è detta spazio topologico; l'insieme τ è detto topologia, mentre gli elementi di τ sono chiamati aperti della topologia.

Esempi.

1. $(X, \mathcal{P}(X))$: Topologia discreta.
2. $(X, \{\emptyset, X\})$: Topologia grossolana (o banale).
3. (X, τ_c), $\tau_c = \{\emptyset\} \cup \{X\} \cup \{U | U^c$ è un insieme finito$\}$: Topologia cofinita.
4. $(X = \mathbb{R}^n, \tau_\varepsilon)$, $U \in \tau_\varepsilon$ se U è l'insieme vuoto, $\mathbb{R}^n$ oppure è un'unione di sottoinsiemi della forma $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,p) < r\}$: Topologia euclidea.
5. $X = \mathbb{R}^n$, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^n\} \cup \{B_r(\underline{0}) \quad r > 0\}$: Topologia dei dischi.
6. $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a)\}$: Topologia delle semirette.
7. $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{[-a, a]\}$ non è una topologia, perché non è chiusa rispetto all'unione. Ad esempio

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1, 1) \notin \tau.$$

Definizione. Un sottoinsieme $C \subset X$ si dice chiuso nella topologia τ se C^c è un aperto di τ.

Proposizione. *Sia (X, τ) uno spazio topologico.*

1. *$\emptyset, X$ sono chiusi.*
2. *L'intersezione di chiusi è un chiuso.*
3. *L'unione finita di chiusi è un chiuso.*

Definizione. Sia $x \in X$; un intorno di x è un sottoinsieme $W \subset X$ che contiene un aperto U che contiene x: $x \in U \subset W$. Normalmente, dicendo intorno sottintenderemo intorno aperto.

Definizione. Sia $Y \subset X$; un punto $y \in Y$ è interno a Y se esiste un intorno W di y tale che $W \subset Y$.
L'insieme di tutti i punti interni di Y si chiama interno di Y, e si denota con $\mathring{Y}$. Equivalentemente $\mathring{Y}$ è il più grande aperto di X contenuto in Y.

Osservazione. Y è aperto $\iff Y = \mathring{Y}$.

Dim. Esercizio.

Definizione. Sia $Y \subset X$; un punto $x \in X$ è di aderenza per Y se per ogni intorno W_x di x si ha $W_x \cap Y \neq \emptyset$.
L'insieme di tutti i punti di aderenza di Y in X si chiama chiusura di Y in X, e si denota con $\overline{Y}$. Equivalentemente $\overline{Y}$ è il più piccolo chiuso di X che contiene Y.

Osservazione. Y è chiuso $\iff Y = \overline{Y}$.

Dim. Esercizio.

Definizione. La frontiera di Y, denotata con ∂Y è l'insieme $\overline{Y} \setminus \mathring{Y}$.

1.2 Confronto tra topologie

Sia X un insieme e τ_1 e τ_2 due topologie su X.

Definizione. Si dice che τ_1 è più fine di τ_2 ($\tau_1 \succeq \tau_2$) se ogni aperto di τ_2 è un aperto di τ_1. Si dice che τ_1 è strettamente più fine di τ_2 ($\tau_1 \succ \tau_2$) se τ_1 è più fine di τ_2 ed esiste un aperto di τ_1 che non è aperto in τ_2.

Questa è una relazione d'ordine parziale: due topologie diverse possono non essere confrontabili.

Esempio. Sia $X = \mathbb{R}$ e siano τ_1 la topologia discreta, τ_2 la topologia euclidea, τ_3 la topologia dei dischi, τ_4 la topologia delle semirette.
Si ha che $\tau_1 \succ \tau_2, \tau_3, \tau_4$, e che $\tau_2 \succ \tau_3, \tau_4$, mentre τ_3 e τ_4 non sono confrontabili.

1.3 Base di una topologia

Definizione. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \tau$ è una base per τ se ogni aperto non vuoto di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

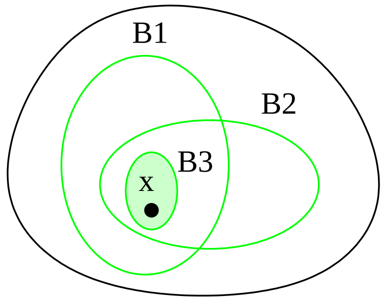
Esempio. Consideriamo lo spazio topologico $(\mathbb{R}^n, \tau_\varepsilon)$; i dischi aperti $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,p) < r\}$ costituiscono una base per τ_ε.

Proposizione. *(Caratterizzazione delle basi) Se $\mathcal{B}$ è una base per una topologia τ su X, allora*

1) $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ t.c. $\quad x \in B$.
2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ t.c $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ e $\forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B_3 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Viceversa, dato un insieme X e una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{B}$ che ha le proprietà 1) e 2) esiste un'unica topologia su X che ha $\mathcal{B}$ come base.

La condizione 2.



Dim. Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia la base per una topologia. X è una aperto, quindi si scrive come unione di elementi della base: $X = \bigcup_{i \in I} B_i$, quindi ogni punto di X è contenuto in almeno uno dei B_i.
L'insieme $B_1 \cap B_2$ è un aperto, quindi si puù scrivere come unione di elementi della base: $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} B_i$; un qualsiasi elemento dell'intersezione è contenuto in almeno uno di questi B_i.
Viceversa, supponiamo che una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{B}$ verifichi 1) e 2) e costruiamo la topologia in questo modo: un sottoinsieme $Y \subset X$ appartiene a τ se e solo se si può scrivere come unione degli elementi della base.
L'insieme vuoto appartiene banalmente a τ, e $X \in \tau$ per la proprietà 1). L'unione di elementi di τ è un'unione di elementi della base, quindi $\in \tau$ per come abbiamo definito τ; siano infine $U_1, U_2 \in \tau$ e verifichiamo che $U_1 \cap U_2 \in \tau$.
Scriviamo $U_1 = \bigcup_{i \in I} B_i$, $U_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$; allora

$$U_1 \cap U_2 = (\bigcup_{i \in I} B_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j).$$

Per concludere è sufficiente osservare che, per la proprietà 2), $B_i \cap B_j$ si può scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$. □

Esempi.

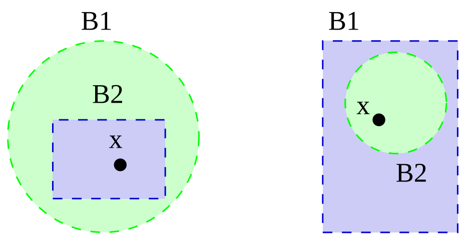
1. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$ è la base per una topologia su $\mathbb{R}$.
2. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[-a, a]\}$ è la base per una topologia su $\mathbb{R}$.

Definizione. Due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ si dicono equivalenti se generano la stessa topologia.

Proposizione. *(Criterio di equivalenza delle basi). Due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono equivalenti se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:*

1. $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \forall x \in B_1 \quad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \quad t.c. \quad x \in B_2 \subset B_1$.
2. $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2, \forall x \in B_2 \quad \exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \quad t.c. \quad x \in B_1 \subset B_2$.

Esempio. In $\mathbb{R}^2$ i dischi aperti e i rettangoli aperti sono basi per la stessa topologia (quella euclidea).



1.4 Applicazioni continue

Definizione. Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice continua se le controimmagini di aperti di Y via f sono aperti di X, cioè se $\forall U \in \sigma$ si ha che $f^{-1}(U) \in \tau$.

Osservazione. La continuità di una applicazione dipende dalle topologie di X e di Y.

Esempi.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ è continua con la topologia euclidea, non lo è con la topologia delle semirette.
2. $(X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$; $f = \mathrm{Id}_X$ è continua $\iff \quad \tau_1 \succeq \tau_2$.
3. X ha la topologia discreta $\iff \forall Y, \forall f : X \to Y \quad f$ è continua. (Per $\Leftarrow$) si scelgano $Y = X$ e $f = \mathrm{Id}_X$)
4. Y ha la topologia banale $\iff \forall X, \forall f : X \to Y \quad f$ è continua. (Per $\Leftarrow$) si scelgano $X = Y$ e $f = \mathrm{Id}_Y$)

La definizione di continuità si può dare anche utilizzando i sottoinsiemi chiusi. Infatti

Proposizione. *$f : X \to Y$ è continua $\iff \quad f^{-1}(C)$ è chiuso in X per ogni C chiuso in Y.*

Dim. Esercizio.

Definizione. Un' applicazione $f : X \to Y$ si dice aperta se $f(U)$ è aperto in Y per ogni U aperto in X.
Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice chiusa se $f(C)$ è chiuso in Y per ogni C chiuso in X.

Osservazione. f può essere aperta, chiusa, aperta e chiusa senza essere continua. Trovare degli esempi come esercizio.

Proposizione. *Siano X, Y e Z tre spazi topologici, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni continue. Allora l'applicazione composta $h = g \circ f : X \to Z$ è continua.*

Quando due spazi topologici sono "uguali"?

Definizione. Due spazi topologici X e Y si dicono omeomorfi se esistono due applicazioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ t.c. $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$.
f e g prendono il nome di omeomorfismi; un omeomorfismo è cioè un'applicazione continua, biunivoca e con inversa continua (biunivoca e bicontinua). Indicheremo l'omeomorfismo tra due spazi topologici con questo simbolo: $\simeq$.

Definizione. Una proprietà $\mathcal{P}$ è invariante per omeomorfismi se ogniqualvolta uno spazio topologico X ha la proprieta $\mathcal{P}$, allora ogni spazio topologico omeomorfo a X ha la proprietà $\mathcal{P}$. Una proprietà invariante per omeomorfismi è detta proprietà topologica.

2

Costruire nuovi spazi topologici

2.1 Sottospazi e topologia indotta

Sia (X, τ) uno spazio topologico e $S \subset X$ un suo sottoinsieme non vuoto.

Definizione. $\tau_S = \{U \cap S \mid U \in \tau\}$ è una topologia su S, detta topologia indotta da τ su S.

Osservazione. Consideriamo l'inclusione $i : S \hookrightarrow X$; si ha che $\forall A \subset X \quad i^{-1}(A) = A \cap S$. La topologia indotta rende continua l'inclusione, anzi è la topologia meno fine che rende continua l'inclusione.

Osservazione. Gli aperti di τ_S non sono necessariamente aperti di τ.

Esempi.

1. $X = \mathbb{R}, S = \mathbf{I} := [0, 1]$
2. $X = \mathbb{R}^{n+1}, S = \mathbf{S}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ Sfere
3. $X = \mathbb{R}^n, S = \mathbf{D}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ Dischi

Esempi.

- $[a, b] \simeq [c, d]$; infatti $[a, b] \simeq \mathbf{I}$ per mezzo di $f : [a, b] \to [0, 1]$ definita da $y = (x - a)/(b - a)$.
- $(a, b) \simeq (c, d)$.
- $(0, 1) = \mathring{\mathbf{I}} \simeq (1, +\infty)$ tramite $y = 1/x$.
- $(a, b) \simeq \mathbb{R}$; infatti $(a, b) \simeq (-\pi/2, \pi/2)$ e $(-\pi/2, \pi/2) \simeq \mathbb{R}$ tramite $y = \tan(x)$.
- $(a, b) \not\simeq [a, b]$. Lo vedremo più avanti.
- $\mathbf{S}^n \backslash P \simeq \mathbb{R}^n$ tramite la proiezione stereografica.

2.2 Prodotti e topologia prodotto

Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici.

Definizione. La topologia prodotto $\tau_{X \times Y}$ su $X \times Y$ è la topologia su $X \times Y$, che ha come base $\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U_X \times V_Y \mid U_X \in \tau_X, V_Y \in \tau_Y\}$. Un aperto della forma $U_X \times V_Y$ viene detto aperto elementare della topologia prodotto.

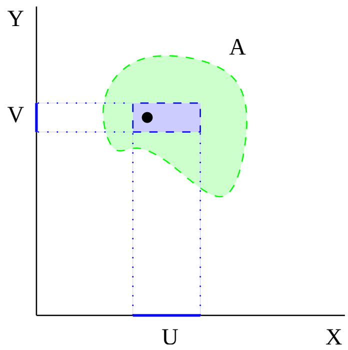
Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Le proiezioni sui fattori sono applicazioni continue, anzi, la topologia prodotto è la topologia meno fine che rende continue le proiezioni.

Osservazione. le proiezioni sono applicazioni aperte.

Dim. Sia A un aperto di $X \times Y$; per mostrare che $\pi_X(A)$ è aperto mostro che ogni punto è punto interno. Sia $x \in \pi_X(A)$; scelgo $y \in \pi_Y(A)$ t.c. $(x, y) \in A$.
A è unione di aperti elementari, quindi $(x, y) \in U_X \times V_Y \subset A$; si ha quindi che $x \in \pi_X(U_X \times V_Y) = U_X \subset \pi_X(A)$ e dunque x è punto interno di $\pi_X(A)$. □



Proposizione. *$\forall y \in Y$ lo spazio topologico $X \times \{y\}$, con la topologia indotta, è omeomorfo ad X.*

Dim. Consideriamo l'applicazione $f : X \times \{y\} \to X$ definita ponendo $f(x, y) = x$; $f = \pi_X \circ i$ è continua e biiettiva; mostriamo che è aperta.
Sia W un aperto di $X \times \{y\}$; W è intersezione di un aperto di $X \times Y$ con $X \times \{y\}$:

$$W = (\bigcup_{j \in J} (U_j \times V_j)) \bigcap (X \times \{y\});$$

quindi $W = \bigcup_{j \in J'} (U_j \times \{y\})$ dove $J' = \{j \in J \mid y \in V_j\}$. Si ha pertanto che $f(W) = \bigcup_{j \in J'} U_j$. □

Proposizione. *(Proprietà universale dei prodotti) Sia A uno spazio topologico e $f : A \to X, g : A \to Y$ due applicazioni. Sia $h : A \to X \times Y$ l'applicazione definita da $h(a) = (f(a), g(a))$;*

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & X \times Y \arrow[ul, "\pi_Y"'] \arrow[dl, "\pi_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

allora h è continua se e solo se f e g sono continue.

Dim. $\Rightarrow$) è ovvia, in quanto $f = h \circ \pi_X$ e $g = h \circ \pi_Y$.
$\Leftarrow$) Dobbiamo dimostrare che h è continua. Scegliamo un aperto $W \subset X \times Y$; per ogni punto $(x, y) \in W$ esiste un aperto elementare $U_x \times V_y$ tale che $(x, y) \in$

$U_x \times V_y \subset W$ e quindi $h^{-1}(x,y) \subset h^{-1}(U_x \times V_y) \subset h^{-1}(W)$. Facendo variare $(x,y) \in W$ otteniamo

$$h^{-1}(W) = \bigcup h^{-1}(U_x \times V_y);$$

è quindi sufficiente mostrare che $h^{-1}(U_x \times V_y)$ è un sottoinsieme aperto di A.

$$h^{-1}(U_x \times V_y) = \{a \in A \mid h(a) \in U_x \times V_y\} =$$
$$= \{a \in A \mid f(a) \in U_x, g(a) \in V_y\} = \{a \in f^{-1}(U_x) \cap g^{-1}(V_y)\}$$

e la tesi segue dalla continuità di f e g. □

Definizione. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione; il grafico di f è l'insieme $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y | f(x) = y\} = \{(x, f(x))\}$

Proposizione. *Se f è continua, allora $\Gamma_f \simeq X$.*

Dim. Esercizio.

2.3 Quozienti e topologia quoziente

Definizione. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva da uno spazio topologico X su un insieme Y. La topologia più fine che rende f continua è detta topologia quoziente. E' costituita dai sottoinsiemi

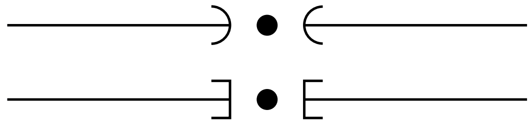
$$\tau_f = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \quad \text{è aperto in} \quad X\}$$

Casi significativi:

1. X spazio topologico, $\sim$ relazione di equivalenza in X, $X/\sim$ insieme quoziente, $p : X \to X/\sim$ proiezione sul quoziente.
2. Contrazione ad un punto di un sottoinsieme: $A \subset X$; definisco la relazione $\sim_A$ in questo modo: $x \sim_A x' \Leftrightarrow x, x' \in A$. Denotiamo $X/\sim_A$ con X/A.

Esempi.

1. $X = \mathbb{R}, A = [-1, 1]$.
2. $X = \mathbb{R}, A = (-1, 1)$.



Proposizione. *(Proprietà universale del quoziente) Sia $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva di spazi topologici tale che Y abbia la topologia quoziente rispetto ad f; sia poi $g : Y \to Z$ un'applicazione tra spazi topologici.*
Allora $g \circ f$ è continua se e solo se g è continua.

Dim. Se g è continua allora $g \circ f$ è continua perché composizione di applicazioni continue.
Viceversa supponiamo che $g \circ f$ sia continua. Sia V un aperto di Z; dobbiamo dimostrare che $g^{-1}(V)$ è aperto in Y; sappiamo che $f^{-1}(g^{-1}(V))$ è aperto in X per la continuità di $g \circ f$; ma un sottoinsieme di Y è un aperto della topologia quoziente se e solo se la sua controimmagine tramite f è un aperto. □

Proposizione. *(Omeomorfismi di quozienti) Sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo; siano $\sim_X$ e $\sim_Y$ relazioni di equivalenza in X e in Y. Se f passa al quoziente ($\forall x, x' \in X \quad x \sim_X x' \iff f(x) \sim_Y f(x')$) allora $X/\sim_X \simeq Y/\sim_Y$.*

Dim. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/\sim_X \arrow[r, dashed] & Y/\sim_Y \end{tikzcd}$$

e definiamo $F : X/\sim_X \to Y/\sim_Y$ in questo modo: $F([x]) = [f(x)]$.
F è ben definita perché f passa al quoziente. Infatti, se $x' \sim_X x$ si ha che $f(x) \sim_Y f(x')$ e quindi $F([x']) = [f(x')] = [f(x)]$.
F è continua per la proprietà universale del quoziente; infatti $F \circ \pi_X$ è continua, essendo $F \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$ e quest'ultima applicazione è continua in quanto composizione di applicazioni continue.
F è iniettiva; infatti $F([x]) = F([x']) \Leftrightarrow [f(x)] = [f(x')] \Leftrightarrow f(x) \sim_Y f(x') \Leftrightarrow x \sim_X x' \Leftrightarrow [x] = [x']$.
F è suriettiva perché f lo è: preso $[y] \in Y/\sim_Y$ sappiamo che esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$ per la suriettività di f, e abbiamo $F([x] = [f(x)] = [y])$.
F^{-1} è continua per la proprietà universale del quoziente ($\pi_Y \circ F^{-1} = \pi_X \circ f^{-1}$ è continua). □

Osservazione. Questa proposizione giustifica il procedimento di "taglia e incolla" che vedremo più avanti.

Definizione. Siano (X, x_0) e (Y, y_0) due spazi topologici in cui è stato scelto un punto, detto punto base; l'unione a un punto di questi due spazi è lo spazio topologico $(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \sqcup Y)/\sim$ dove $\sim$ identifica x_0 con y_0.

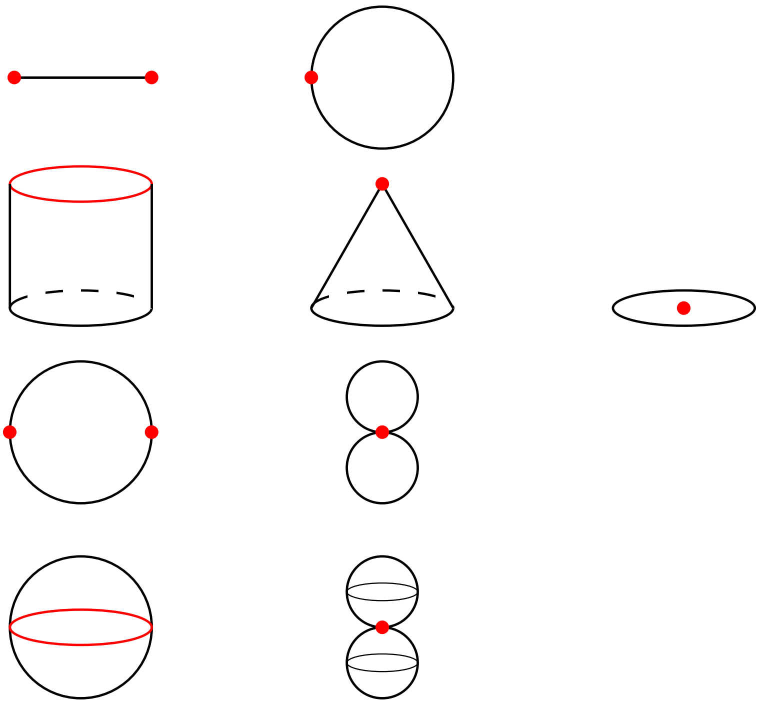
Esempi.

1. Contrazioni di un sottoinsieme a un punto
   a) $X = \mathbf{I}$, $A = \{0, 1\}$; allora $\mathbf{I}/A \simeq \mathbf{S}^1$; infatti, consideriamo l'applicazione $e : \mathbf{I} \to \mathbf{S}^1$, che manda t in $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$; tale applicazione passa al quoziente, e pertanto risulta definita un'applicazione $g : \mathbf{I}/A :\to \mathbf{S}^1$ che fa commutare il diagramma

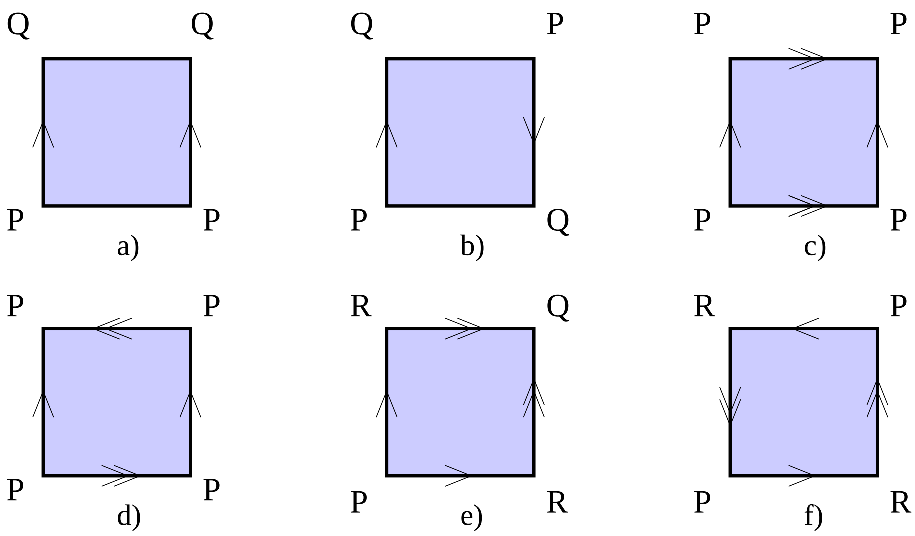
$$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{S}^1 \\ \mathbf{I}/A \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

   E' immediato verificare che g è biunivoca; g è continua per la proprietà universale del quoziente; si può mostrare (lo faremo più avanti) che anche g^{-1} è continua.

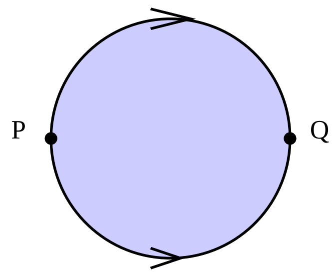
b) $X = \mathbf{S}^1 \times I, A = \mathbf{S}^1 \times \{1\}$; $X/A \simeq \mathbf{D}^2$.
c) $X = \mathbf{S}^1, A = \{P, Q\}$ o $A = \{P, Q, R\}$; $X/A \simeq \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$ o $X/A \simeq \vee^3 \mathbf{S}^1$.
d) $X = \mathbf{S}^2, A = \mathbf{S}^1$; $X/A \simeq \mathbf{S}^2 \vee \mathbf{S}^2$.

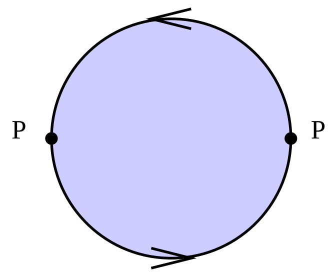


2. Relazioni d'equivalenza. $X = \mathbf{I} \times \mathbf{I} \subset \mathbb{R}^2$
   a) $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \{x, x'\} = \{0, 1\}$ e $y = y'$; Cilindro
   b) $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \{x, x'\} = \{0, 1\}$ e $y = 1 - y'$; Nastro di Moebius
   c) Toro
   d) Bottiglia di Klein
   e) $\mathbf{S}^2$
   f) $\mathbb{RP}^2$



Osservazione. Gli ultimi due spazi (la sfera e il piano proiettivo) possono essere visti anche come quozienti di $\mathbf{D}^2$ (anzi, questo è il modo con cui solitamente vengono rappresentati come quozienti):





3

Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^n$

Consideriamo lo spazio topologico dato da $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ con la topologia indotta da quella euclidea e in tale spazio consideriamo la relazione d'equivalenza $\sim$ definita in questo modo: $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w},\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda w_1 \\ \lambda w_2 \\ \dots \\ \lambda w_{n+1} \end{bmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

L'insieme quoziente viene denotato con

$$\mathbb{RP}^n := \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}}{\sim};$$

abbiamo la proiezione naturale

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n.$$

Definizione. L'insieme $\mathbb{RP}^n$ dotato della topologia quoziente rispetto alla proiezione naturale π è detto *spazio proiettivo reale n-dimensionale*.

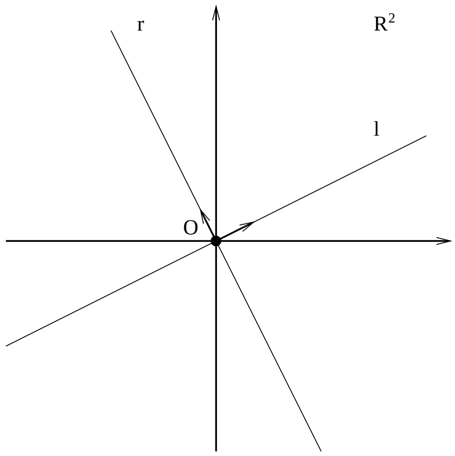
Vediamo nel dettaglio alcuni casi particolari di spazio proiettivo reale: la retta proiettiva reale e il piano proiettivo reale.

3.1 La retta proiettiva reale $\mathbb{RP}^1$

Supponiamo che $n = 1$ e quindi come spazio vettoriale di partenza consideriamo $\mathbb{R}^2$; in questo caso avremo la *retta proiettiva reale*. Vogliamo costruire un *modello* di $\mathbb{RP}^1$, ossia uno spazio topologico che sia omeomorfo a $\mathbb{RP}^1$; in pratica costruiremo un'insieme che sia in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{RP}^1$ e lo doteremo della topologia indotta dalla biiezione (gli aperti del modello saranno i sottoinsiemi che corrispondono agli aperti di $\mathbb{RP}^1$) in modo che la biiezione sia l'omeomorfismo cercato.

3.1.1 Fascio di rette

Ad ogni punto di $\mathbb{R}^2$ diverso da $\mathbf{0}$ posso associare la retta che passa per quel punto e per $\mathbf{0}$. Tutti i punti di una stessa retta appartengono a un'unica classe di equivalenza della relazione $\sim$ e viceversa una classe di equivalenza individua un'unica retta per l'origine di $\mathbb{R}^2$



Allora c'è una corrispondenza biunivoca tra

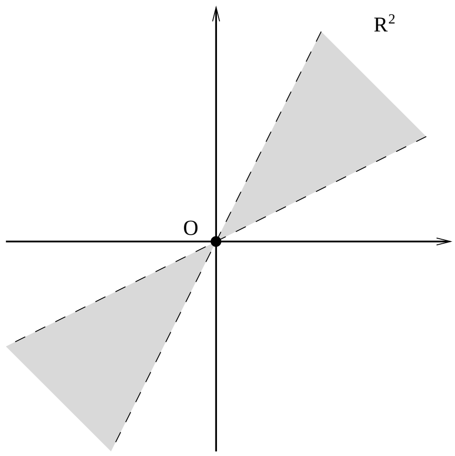
$$\{\text{punti di } \mathbb{RP}^1\} \longleftrightarrow \{\text{rette di } \mathbb{R}^2 \text{ passanti per } \mathbf{0}\ \};$$

inoltre la proiezione naturale π corrisponde ad associare ad ogni punto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ la retta di $\mathbb{R}^2$ per $\mathbf{0}$ che passa per quel punto.

La topologia. A cosa corrispondono gli aperti di $\mathbb{RP}^1$? Per definizione di topologia quoziente, un aperto di $\mathbb{RP}^1$ è un sottoinsieme di $\mathbb{RP}^1$ formato da classi di equivalenza di $\sim$ la cui controimmagine tramite π è aperto in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla topologia euclidea:

$$U \subset \mathbb{RP}^1 \text{ è aperto } \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ è aperto.}$$

Usando la biiezione sopra citata, abbiamo che un aperto di $\mathbb{RP}^1$ è un insieme di rette di $\mathbb{R}^2$ per $\mathbf{0}$ i cui punti formano un aperto di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea.

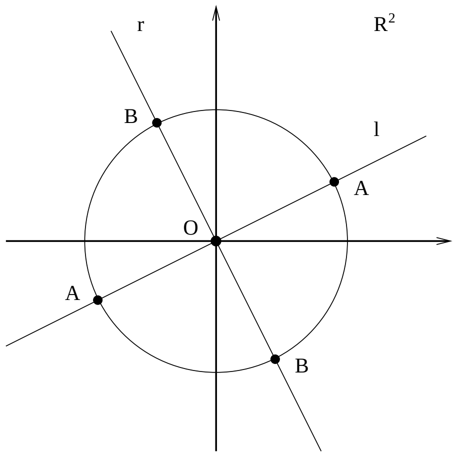


3.1.2 Coppie di punti diametralmente opposti su $\mathbf{S}^1$

Consideriamo la circonferenza $\mathbf{S}^1$ di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$$

Ogni retta di $\mathbb{R}^2$ per O taglia la circonferenza in due punti diametralmente opposti e viceversa, data una coppia di punti diametralmente opposti sulla circonferenza, essa individua un'unica retta di $\mathbb{R}^2$ per $\mathbf{0}$

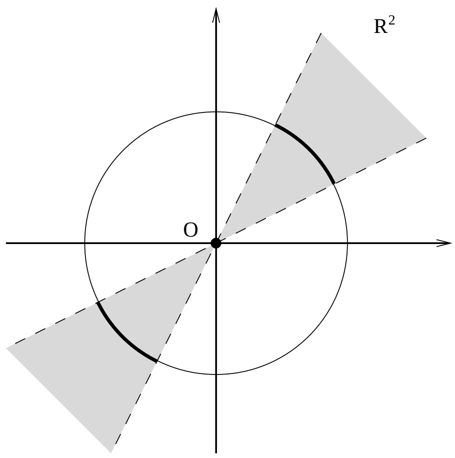


C'è dunque una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{punti di } \mathbb{RP}^1\} \longleftrightarrow \{\text{coppie di punti diametralmente opposti su } \mathbf{S}^1\}$$

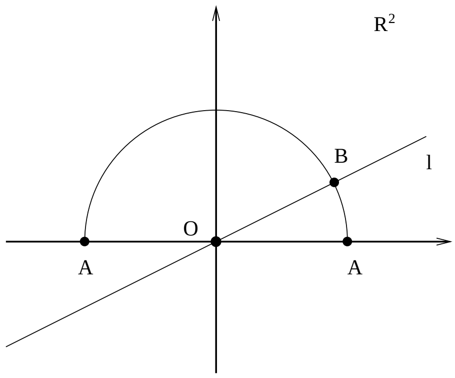
e quindi abbiamo un altro modello di $\mathbb{RP}^1$.

La topologia. A cosa corrispondono gli aperti di $\mathbb{RP}^1$? Essi sono intersezioni di aperti del modello di $\mathbb{RP}^1$ dato dal fascio di rette con $\mathbf{S}^1$; vediamo in figura un elemento della base degli aperti di questo modello di $\mathbb{RP}^1$.



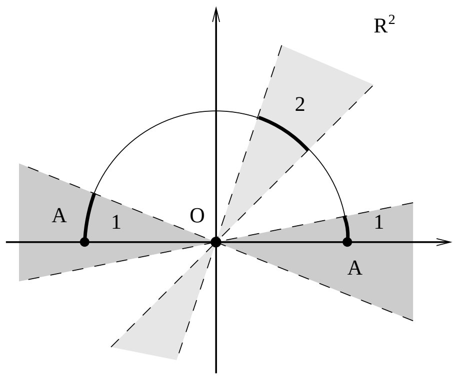
3.1.3 La circonferenza $\mathbf{S}^1$

Consideriamo ora solo la semicirconferenza nel semipiano $\{y \geq 0\}$; tutte le rette di $\mathbb{R}^2$ per $\mathbf{0}$ tranne la retta orizzontale tagliano la semicirconferenza in un solo punto, mentre la retta orizzontale la taglia nei due punti con ordinata nulla.

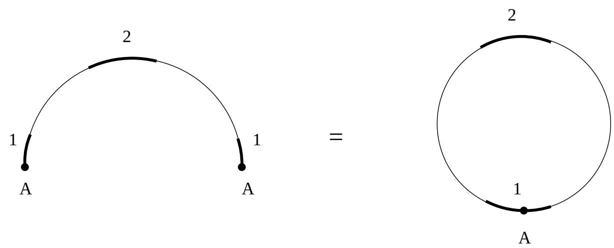


Un altro modello di $\mathbb{RP}^1$ è dunque dato dalla semicirconferenza con i due estremi A identificati.

La topologia. A cosa corrispondono gli aperti di $\mathbb{RP}^1$? Ci sono due tipi diversi di elementi della base della topologia: quelli che contengono il punto A e quelli che non lo contengono. Entrambi i tipi di aperti sono, come nel caso precedente, intersezioni di aperti di $\mathbb{RP}^1$ con la semicirconferenza; li vediamo rappresentati entrambi in figura.

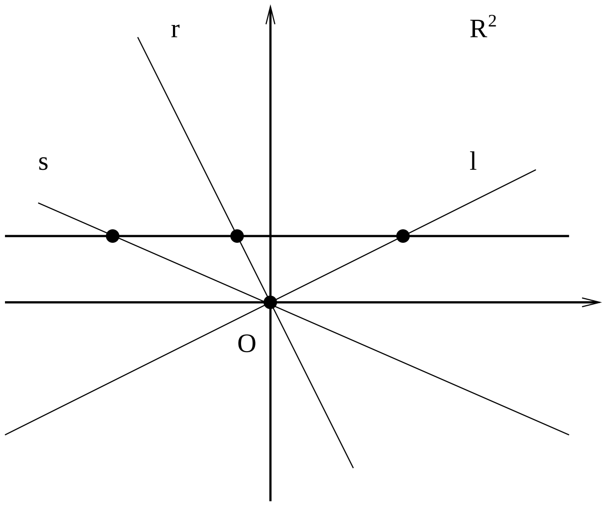


Questo modello di $\mathbb{RP}^1$ è dunque omeomorfo allo spazio quoziente dato da $\mathbf{I}$ con gli estremi identificati e quindi è omeomorfo a $\mathbf{S}^1$.



3.1.4 Confronto tra $\mathbb{RP}^1$ e $\mathbb{R}^1$

Torniamo al modello della retta proiettiva dato dal fascio di rette di $\mathbb{R}^2$ per $\mathbf{0}$ e consideriamo la retta $y = 1$ (omeomorfa a $\mathbb{R}^1$)



Ogni retta del fascio, tranne quella orizzontale, interseca la retta $y = 1$ in un punto; la retta orizzontale invece non ha intersezione con la retta $y = 1$. Allora, dal punto di vista insiemistico, abbiamo che $\mathbb{RP}^1$ è $\mathbb{R}^1$ più un punto, detto *punto all'infinito*. Inoltre, dal punto di vista topologico $\mathbb{RP}^1$ meno quel punto è omeomorfo a $\mathbb{R}^1$.

3.2 Il piano proiettivo reale $\mathbb{RP}^2$

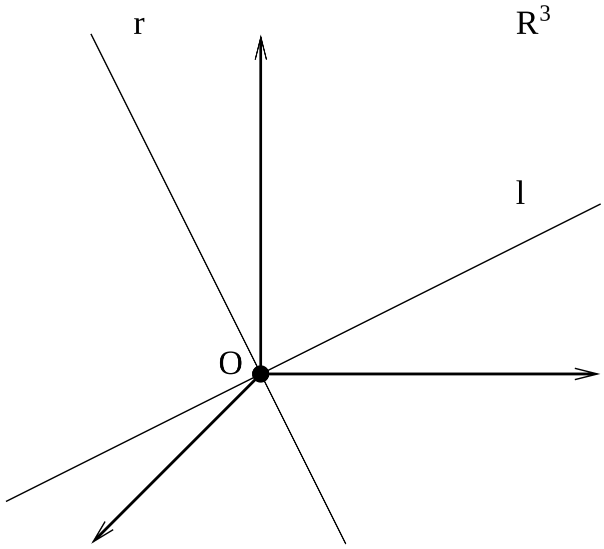
Supponiamo ora che $n = 2$ e quindi consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$; in questo caso avremo il *piano proiettivo reale.*
Anche per $\mathbb{RP}^2$ vogliamo costruire un *modello.*

3.2.1 Stella di rette

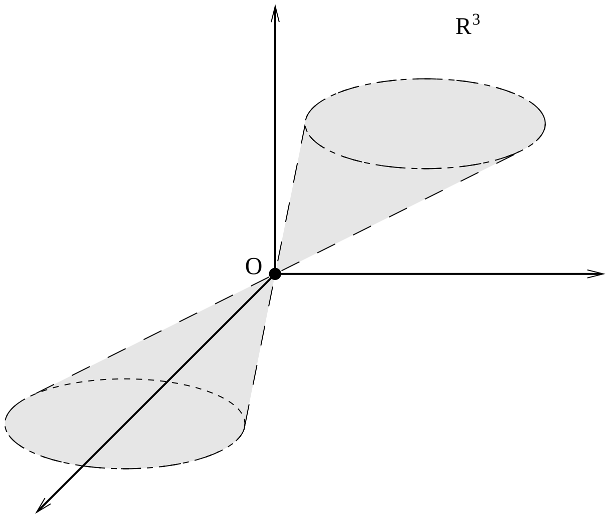
Come nel caso della retta proiettiva, c'è una biiezione

$$\mathbb{RP}^2 \longleftrightarrow \{\text{rette di } \mathbb{R}^3 \text{ passanti per } \mathbf{0}\};$$

inoltre la proiezione naturale π corrisponde ad associare ad ogni punto di $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ la retta di $\mathbb{R}^3$ per $\mathbf{0}$ che passa per quel punto.



La topologia. Gli aperti di $\mathbb{RP}^2$ sono gli insiemi di rette di $\mathbb{R}^3$ per $\mathbf{0}$ i cui punti formano un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ nella topologia euclidea.

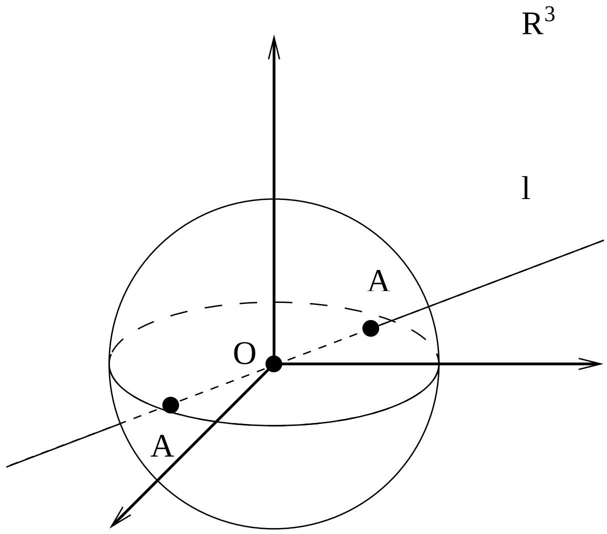


3.2.2 Coppie di punti su $\mathbf{S^2}$

Scegliamo in $\mathbb{R}^3$ la sfera $\mathbf{S}^2$ di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1

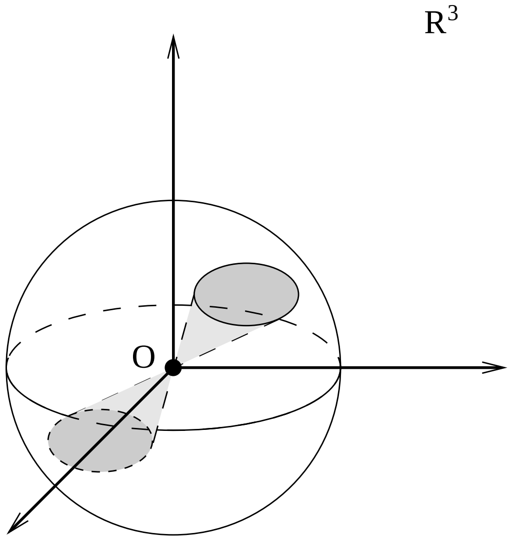
$$\mathbf{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ogni retta per $\mathbf{0}$ taglia la sfera in due punti diametralmente opposti e viceversa, data una coppia di punti diametralmente opposti sulla sfera, essa individua un'unica retta di $\mathbb{R}^3$ per $\mathbf{0}$.



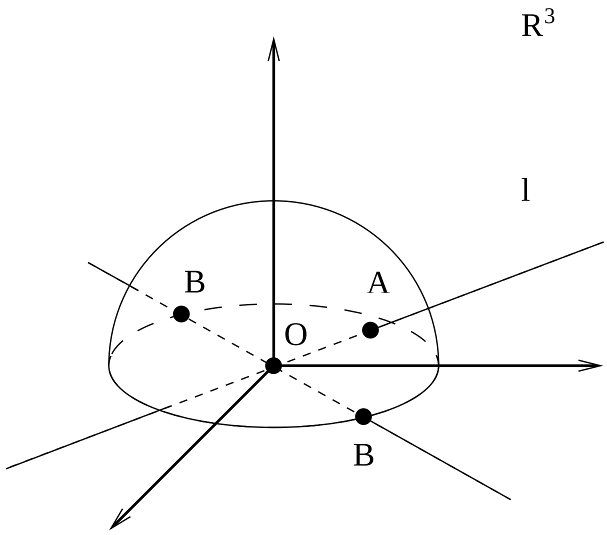
Quindi un'altro modello di $\mathbb{RP}^2$ è dato dalle *coppie di punti diametralmente opposti* su una superficie sferica.

La topologia. Una base per gli aperti in questo modello di $\mathbb{RP}^2$ è formata dalle coppie di *calotte sferiche aperte diametralmente opposte*, che sono intersezioni degli aperti nel modello precedente con la sfera $\mathbf{S}^2$.



3.2.3 Disco con identificazione del bordo

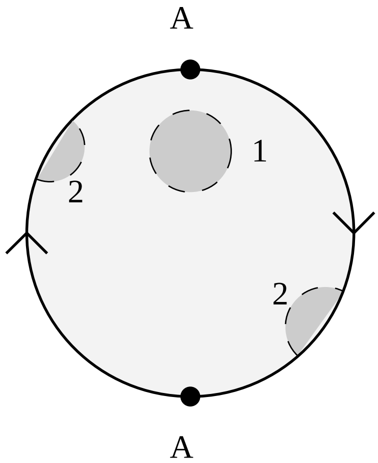
Dividiamo ora la sfera nelle due calotte separate dall'equatore (i.e. dalla circonferenza sul piano $z = 0$).
Consideriamo solo la calotta Nord: le rette di $\mathbb{R}^3$ per $\mathbf{0}$, tranne quelle che passano per la circonferenza equatoriale, tagliano la calotta in un solo punto, mentre quelle che passano per l'equatore la tagliano in una coppia di punti diametralmente opposti.



Proiettando la calotta sul piano $z = 0$, otteniamo il disco delimitato dalla circonferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

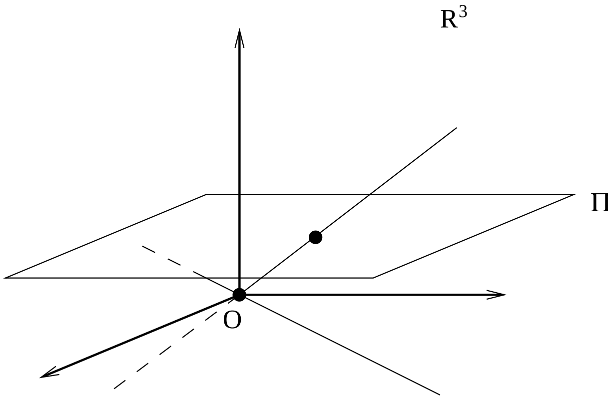
Allora se assumiamo che i punti diametralmente opposti di questa circonferenza individuino lo stesso punto, abbiamo un nuovo modello di $\mathbb{RP}^2$, come disco con una opportuna identificazione sul bordo.



La topologia. Gli aperti che non intersecano il bordo del disco sono gli stessi della topologia euclidea, mentre quelli che intersecano il bordo sono come in figura.

3.2.4 Confronto tra $\mathbb{RP}^2$ e $\mathbb{R}^2$

Torniamo al modello di piano proiettivo come stella di rette di $\mathbb{R}^3$ per $\{\mathbf{0}\}$, e consideriamo il piano $\Pi : z = 1$ (che è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$).
Ogni retta della stella, tranne quelle che giacciono sul piano $z = 0$, tagliano il piano Π in un punto, mentre le rette sul piano $z = 0$ non hanno intersezione con Π.



Quindi $\mathbb{RP}^2$ meno un fascio di rette è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^2$ (in realtà questa corrispondenza biunivoca è un omeomorfismo, se su $\mathbb{R}^2$ prendiamo la topologia euclidea).
Dunque $\mathbb{RP}^2$ è un $\mathbb{R}^2$ a cui sono stati aggiunti dei punti che corrispondono alle rette di un fascio di rette, e cioè un $\mathbb{RP}^1$.

4

Proprietà topologiche

4.1 Spazi compatti

Definizione. Sia X uno spazio topologico; un ricoprimento aperto di X è una famiglia di aperti $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ tale che $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definizione. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento di X; $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ è un sottoricoprimento di $\mathcal{U}$ se $\forall j \in J\ \exists\ i \in I$ t.c. $V_j = U_i$.

Definizione. Uno spazio topologico X si dice compatto se e solo se per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ è possibile trovare un sottoricoprimento finito $\mathcal{V}$.

Esempi.

1. X finito è compatto con qualsiasi topologia.
2. X qualsiasi con la topologia grossolana è compatto.
3. X infinito con la topologia discreta non è compatto.
4. X qualsiasi con la topologia cofinita è compatto.
5. $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea non è compatto.

Osservazione. Se (X, τ) è compatto, allora (X, σ) è compatto se $\tau \succeq \sigma$.
Se (X, τ) non è compatto, allora (X, σ) non è compatto se $\tau \preceq \sigma$.

Proposizione. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua, e sia X uno spazio compatto. Allora $f(X)$ è uno spazio compatto.*

Dim. Sia $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$; allora $\mathcal{U} = \{U_j := f^{-1}(V_j)\}_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto di X, poiché f è continua.
Essendo X compatto, esiste un sottoricoprimento finito

$$\{U_1 = f^{-1}(V_1), \ldots, U_n = f^{-1}(V_n)\};$$

allora $\{V_1, \ldots V_n\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$; infatti, preso $y \in f(X)$, esiste x tale che $y = f(x)$ e $x \in U_k$ per qualche k. Ne segue che $y \in V_k$, poichè $f(f^{-1}(V_k)) \subset V_k$. $\square$

Corollario.

1. *Il quoziente di uno spazio compatto è compatto.*
2. *La compattezza è una proprietà invariante per omeomorfismi.*

Diamo senza dimostrazione il seguente risultato fondamentale:

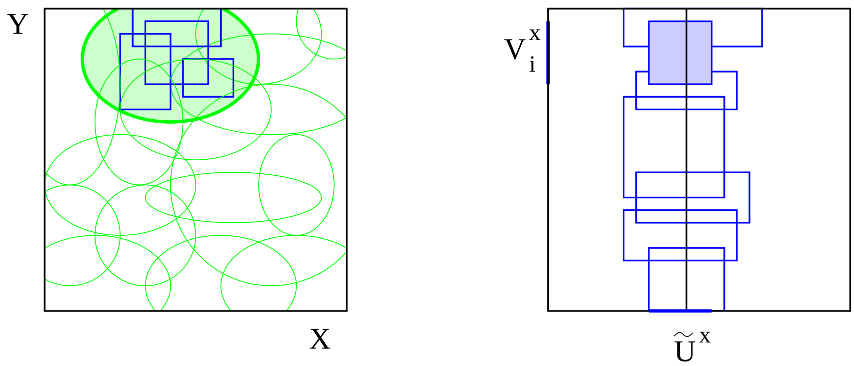
Teorema. *L'intervallo* $\mathbf{I}$ *è compatto.*

Corollario.

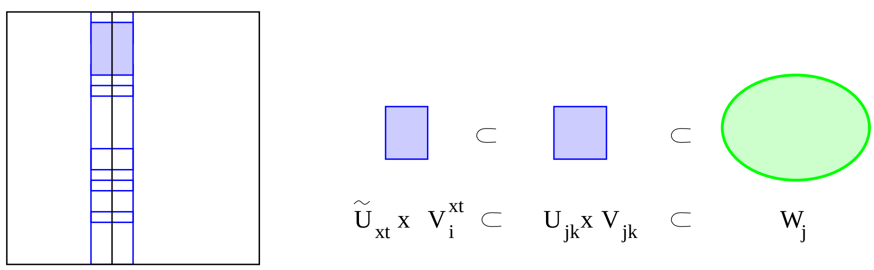
1. *Gli intervalli chiusi* $[a, b]$ *sono compatti.*
2. $\mathbf{S}^1$ *è compatto.*

Teorema. X, Y *sono spazi topologici compatti se e solo se* $X \times Y$ *è uno spazio topologico compatto.*

Dim. $\Leftarrow$) Le proiezioni sono continue.
$\Rightarrow$) Sia $\mathcal{U} = \{W_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$; ogni W_j è unione di aperti elementari $U_{jk} \times V_{jk}$; otteniamo così un nuovo ricoprimento aperto di $X \times Y$, $\mathcal{V} = \{U_{jk} \times V_{jk}\}_{j \in J, k \in K}$.



Per ogni $x \in X$ il sottospazio $\{x\} \times Y \simeq Y$ è compatto; quindi esiste un sottoricoprimento di $\mathcal{V}$ finito che copre $\{x\} \times Y$, $\{U_i^x \times V_i^x\}_{i=1,\ldots n}$ e U_i^x, V_i^x sono particolari U_{jk} e V_{jk}.
Sia $\widetilde{U}_x = \bigcap_{i=i}^n U_i^x$; al variare di $x \in X$ gli $\widetilde{U}_x$ costituiscono un ricoprimento aperto di X, dal quale, per la compattezza di X è possibile estrarre un sottoricoprimento finito $\{\widetilde{U}_{x_t}\}_{t=1,\ldots m}$.



La famiglia $\{\widetilde{U}_{x_t} \times V_i^{x_t}\}_{i=1,\ldots n \quad t=1,\ldots m}$ è un ricoprimento finito di $X \times Y$; si ha che $\widetilde{U}_{x_t} \times V_i^{x_t} \subset U_{jk} \times V_{jk} \subset W_j$, per un'opportuna scelta di j e di k, e quindi anche dalla copertura iniziale si può estrarre una sottocopertura finita. $\square$

Corollario. $\mathbf{I}^n$ *è compatto,* $\mathbb{R}^n$ *non è compatto.*

Proposizione. *(Chiuso di Compatto) Un sottoinsieme chiuso C di uno spazio compatto X è uno spazio compatto (con la topologia indotta).*

Dim. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di C; poichè C ha la topologia indotta, $U_i = V_i \cap C$, con V_i aperto di X.
$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I} \cup \{C^c\}$ è un ricoprimento aperto di X; poiché X è compatto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito $V_1, \dots, V_n, C^c$; allora $U_1, \dots U_n$ costituiscono un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. □

Corollario.

1. *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. Allora C è compatto.*
2. $\mathbf{S}^n, \mathbf{D}^n$ *sono compatti.* $\mathbb{RP}^n$ *è compatto.*

Esistono altre nozioni di compattezza, oltre a quella da noi considerata, detta anche compattezza per ricoprimenti; particolarmente importante è la compattezza per successioni.

Definizione. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice convergente al punto $x \in X$ se per ogni intorno U di x esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$.

Definizione. Uno spazio topologico X si dice compatto per successioni se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.

Definizione. Uno spazio topologico X verifica il Primo assioma di numerabilità se per ogni punto $x \in X$ esiste una famiglia di intorni ${U^x_n}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che per ogni intorno V di x esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $U^x_{\bar{n}} \subset V$.

Definizione. Uno spazio topologico X verifica il Secondo assioma di numerabilità se ammette una base numerabile per la topologia.

Le due nozioni di compattezza non sono equivalenti: abbiamo che se X è compatto per ricoprimenti e verifica il primo assioma di numerabilità allora X è compatto per successioni, mentre il viceversa è vero se X verifica il secondo assioma di numerabilità.
Un esempio di spazio che verifica i due assiomi è dato da $\mathbb{R}^n$: preso $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un sistema fondamentale di intorni è dato dai dischi aperti centrati in $\mathbf{x}$ di raggio $1/n$, mentre una base numerabile è data dai i dischi aperti a centro razionale e raggio razionale.

4.2 Spazi di Hausdorff

Definizione. Uno spazio topologico X si dice di Hausdorff (o T_2) se, per ogni coppia di punti diversi $x, y \in X$ esistono intorni $U_x \ni x, U_y \ni y$ t.c. $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Esempi.

1. Uno spazio metrico è uno spazio di Hausdorff.
2. Uno spazio infinito con la topologia cofinita non è di Hausdorff.
3. Un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff.

Proposizione. *(Compatto di Hausdorff) Un sottoinsieme compatto K di uno spazio di Hausdorff X è un sottoinsieme chiuso.*

Dim. Dimostriamo che K^c è aperto. Sia x un punto di K^c; per ogni punto y di K esistono un intorno U_y di x e un intorno V_y di y disgiunti.
Gli aperti V_y costituiscono una copertura aperta di K, quindi esiste una sottocopertura finita $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$; sia $U = \bigcap_{i=1,\ldots,n} U_{y_i}$; U è un aperto e $U \cap K = \emptyset$, quindi x è un punto interno a K^c. □

Corollario. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e biunivoca. Se X è compatto e Y è di Hausdorff allora f è un omeomorfismo.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che f^{-1} è continua, e ciò è equivalente a mostrare che f è un'applicazione chiusa.
Sia dunque C un chiuso di X; C è chiuso in X compatto, e quindi C è compatto; f è un'applicazione continua, e quindi $f(C)$ è compatto in Y.
Poichè Y è uno spazio di Hausdorff, per la proposizione precedente $f(C)$ è chiuso. □

Corollario. *Sia $A \subset \mathbf{I}$ il sottoinsieme costituito dai punti 0 e 1. Allora $\mathbf{I}/A \simeq \mathbf{S}^1$.*

Utilizzando la proposizione sui sottospazi compatti di spazi di Hausdorff siamo ora in grado di dare la caratterizzazione dei sottospazi compatti di $\mathbb{R}^n$.

Teorema. *Un sottospazio $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dim. Abbiamo già visto che i sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ sono compatti.
La proposizione precedente ci dice che un sottospazio compatto di $\mathbb{R}^n$ è chiuso, in quanto $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff.
Resta dunque da mostrare che un sottospazio K, compatto di $\mathbb{R}^n$ è limitato. Consideriamo il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_n = B_0(n) \cap K\}_{n\in\mathbb{N}}$ di K costituito dai dischi aperti di centro l'origine e di raggio naturale.
Poichè K è compatto, tale ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito $U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}$; sia M il massimo dei raggi di $U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}$.
Il sottospazio K è quindi contenuto in $B_0(M)$, ed è pertanto limitato. □

Corollario. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su uno spazio compatto X; allora f ammette massimo e minimo.*

Dim. Poichè f è continua, $f(X)$ è compatto in $\mathbb{R}$, e quindi chiuso e limitato.
Essendo $f(X)$ limitato, esistono $M = \sup(f(X))$ e $m = \inf(f(X))$, ed essendo $f(X)$ chiuso M ed m sono massimo e minimo. □

Osservazione. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua; non è detto che $f(X)$ sia uno spazio di Hausdorff. Ad esempio sia $(0,1) \subset \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/(0,1)$ la proiezione sul quoziente.

Proposizione. *Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff, sia $X/\sim$ un suo quoziente e $p : X \to X/\sim$ la proiezione sul quoziente. Se p è un'applicazione chiusa, allora $X/\sim$ è uno spazio (compatto) e di Hausdorff.*

Osservazione. Essere di Hausdorff è una proprietà invariante per omeomorfismi.

Proposizione. *X, Y sono spazi topologici di Hausdorff se e solo se $X \times Y$ è uno spazio topologico di Hausdorff.*

Dim. $\Leftarrow$) Lo spazio $X \times \{y\}$ è di Hausdorff perché sottospazio di un Hausdorff, e quindi X è di Hausdorff perché omeomorfo a $X \times \{y\}$.
$\Rightarrow$) Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti di $X \times Y$; se $x_1 \neq x_2$ allora esistono in X intorni disgiunti $U_1 \ni x_1$ e $U_2 \ni x_2$, quindi $U_1 \times Y$ e $U_2 \times Y$ sono intorni disgiunti di (x_1, y_1) e (x_2, y_2); se $x_1 = x_2$ si deve necessariamente avere $y_1 \neq y_2$, e si ripete lo stesso ragionamento. □

4.3 Spazi connessi

Definizione. Uno spazio topologico X è connesso se e solo se non esistono due aperti disgiunti e non vuoti $A, B \subset X$ tali che $A \cup B = X$.

Osservazione. X è connesso $\Longleftrightarrow$ i soli sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi di X sono $\emptyset, X$.

Esempi.

1. Uno spazio topologico X con la topologia grossolana è connesso.
2. Uno spazio topologico X con la topologia discreta è connesso $\Longleftrightarrow$ ha un solo elemento.
3. $(\mathbb{R}, \tau_s)$ è connesso, con τ_s topologia delle semirette
4. $\mathbb{Q}$, con la topologia indotta da $\mathbb{R}$ non è connesso.
5. (X, τ_c) è connesso $\Longleftrightarrow$ X è infinito, con τ_c topologia cofinita

Proposizione. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua, con X connesso. Allora $f(X)$ è connesso.*

Dim. Supponiamo f suriettiva. Un sottoinsieme $U \subset Y$ è aperto e chiuso $\Longleftrightarrow$ la sua retroimmagine $f^{-1}(U)$ è aperta e chiusa.
Ma in X gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono $\emptyset, X$, quindi $f^{-1}(U) = \emptyset$ e quindi $U = \emptyset$, oppure $f^{-1}(U) = X$ e quindi $U = Y$. □

Corollario.

1. *La connessione è una proprietà invariante per omeomorfismi.*
2. *I quozienti di uno spazio topologico connesso sono spazi topologici connessi.*

Diamo senza dimostrazione la seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea:

Teorema. *Tutti e soli i connessi di $(\mathbb{R}, \varepsilon)$ sono i punti, gli intervalli, le semirette e $\mathbb{R}$ stesso.*

Proposizione. *(Condizioni per cui l'unione di connessi è connessa) Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X, con la topologia indotta, tale che Y_i è connesso per ogni $i \in I$.*

1. *Se $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ allora $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ è connesso.*
2. *Se esiste $\bar{\imath}$ tale che $Y_i \cap Y_{\bar{\imath}} \neq \emptyset \quad \forall i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è connesso.*

Dim. 1) Sia $U \subset Y$ un sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto.
Il sottoinsieme U deve avere intersezione non vuota con Y_i per qualche i, e quindi $U \cap Y_i$ è non vuoto, aperto e chiuso in Y_i; poichè Y_i è connesso si ha $U \cap Y_i = Y_i$.
Essendo l'intersezione degli Y_i è non vuota, si ha che $U \cap Y_j \neq \emptyset$ per ogni $j \in I$, e si ripete la dimostrazione precedente.
2) $Z_i = Y_i \cup Y_{\bar{1}}$ è connesso per la dimostrazione precedente, e gli Z_i verificano le ipotesi della parte 1). □

Proposizione. *X, Y sono connessi $\iff X \times Y$ è connesso.*

Dim. $\Leftarrow$) Le proiezioni sono applicazioni continue.
$\Rightarrow$) Sia $A_{x,y} = (X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y)$; $A_{x,y}$ è connesso per la proposizione precedente, e $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_{x,\bar{y}}$ è dunque connesso, ancora per la proposizione precedente. □

Corollario. *$\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{I}^n$ sono spazi topologici connessi.*

Corollario. *$\mathbf{D}^n$ è connesso, $\mathbf{S}^n$ è connesso per $n \geq 1$, $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ è connesso per $n \geq 1$.*

Dim. Il disco può essere visto come unione dei suoi diametri, la sfera come unione di due emisferi, e $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ come unione di $\mathbf{S}^n$ e delle rette per l'origine.
Si applica quindi la proposizione sull'unione di connessi. □

Corollario. *$\mathbb{RP}^n$ è connesso, i quozienti di $\mathbf{I}^2$ sono connessi.*

Un utile strumento per stabilire se un sottoinsieme è connesso è dato dalla seguente

Proposizione. *(Chiusura di connessi) Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$ un sottoinsieme connesso e Y un sottoinsieme di X tale che $A \subset Y \subset \overline{A}$. Allora Y è connesso.*

Dim. Sia $U \subset Y$ un sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto.
L'insieme $U \cap A$ è dunque aperto e chiuso in A; inoltre $U \cap A$ è non vuoto perché $Y \subset \overline{A}$, e quindi, essendo A connesso, $U \cap A = A$, cioè $A \subset U$.
Il complementare di U in Y è aperto e chiuso; se fosse non vuoto, con ragionamento analogo al precedente si avrebbe $A \subset U^c$, quindi $U^c = \emptyset$ e $U = Y$. □

Definizione. Sia X uno spazio topologico e $x, y \in X$; diciamo che x è connesso ad y se esiste un sottospazio connesso $D \subset X$ che contiene x e y. Questa relazione è una relazione di equivalenza, e le classi di equivalenza sono dette componenti connesse di X.

4.4 Spazi connessi per archi

Definizione. Sia X uno spazio topologico. Un arco o cammino in X è un'applicazione continua $f : \mathbf{I} \to X$; $x_0 = f(0)$ è detto punto iniziale del cammino, $x_1 = f(1)$ è detto punto finale. Se $x_0 = x_1$ allora il cammino è detto cammino chiuso o cappio.

Definizione. Il cammino costante di punto base x_0 è l'applicazione costante $\varepsilon_{x_0} : \mathbf{I} \to x_0 \in X$. Dato un cammino $f : \mathbf{I} \to X$ il cammino inverso $\bar{f} : \mathbf{I} \to X$ è il cammino $\bar{f}(t) = f(1-t)$.

Definizione. dati due cammini f, g tali che $f(1) = g(0)$, è possibile definire il cammino prodotto:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, 1/2] \\ g(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

l'applicazione $f * g$ è continua per il seguente

Lemma. *(Lemma d'incollamento) Sia X uno spazio topologico e A, B due sottoinsiemi chiusi di X tali che $X = A \cup B$; siano $f : A \to Z$ e $g : B \to Z$ due applicazioni continue tali che $f(x) = g(x)$ se $x \in A \cap B$; allora l'applicazione $h : X \to Z$ definita ponendo*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

è continua

Dim. Esercizio.

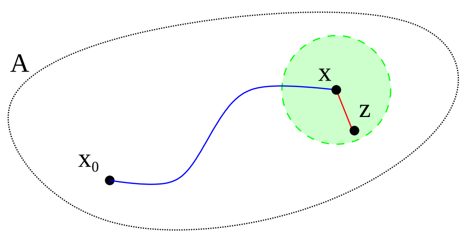
Definizione. Uno spazio topologico X è connesso per archi se $\forall x, y \in X$ esiste un cammino che ha x come punto iniziale e y come punto finale.

Esempi.

1. $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi. Infatti, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due punti di $\mathbb{R}^n$, il cammino $\alpha : \mathbf{I} \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $\alpha(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ congiunge $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
2. Un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi. In particolare $\mathbf{I}^n$ e $\mathbf{D}^n$ sono connessi per archi.

Proposizione. *Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$; allora A è connesso per archi.*

Dim. Sia x_0 un punto di A, e sia $W = \{x \in A \mid \exists \text{ arco che congiunge } x_0 \text{ e } x\}$. Vogliamo dimostrare che W è aperto; a tal fine mostreremo che ogni punto è punto interno.



Sia $x \in W$; poichè A è aperto A contiene un disco aperto centrato in x di raggio opportuno; ogni punto z in questo disco è contenuto in W, perchè può essere congiunto a x da un segmento opportunamente parametrizzato, e quindi può essere congiunto a x_0 per mezzo del cammino prodotto.
Allo stesso modo si mostra che il complementare di W in A è aperto.
Per concludere basta osservare che $W \neq \emptyset$ poiché $x_0 \in W$. $\square$

Corollario. $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ *è connesso per archi.*

Proposizione. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua, e X sia connesso per archi. Allora $f(X)$ è connesso per archi.*

Dim. Siano x, y due punti di $f(X)$, e siano $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ due controimmagini di x e di y; poichè X è connesso per archi esiste una arco $\alpha : \mathbf{I} \to X$ che congiunge $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$.
L'arco $\beta : \mathbf{I} \to Y$ definito ponendo $\beta(t) = f(\alpha(t))$ congiunge x e y. □

Corollario.

1. *I quozienti di connessi per archi sono connessi per archi.*
2. *La connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.*

Corollario. $\mathbb{RP}^n$ *è connesso per archi; i quozienti di* $\mathbf{I}^2$ *sono connessi per archi,* $\mathbf{S}^n$ *è connesso per archi in quanto immagine di* $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ *tramite l'applicazione continua* $f : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbf{S}^n$ *che manda* $\mathbf{x}$ *in* $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$.

Proposizione. *X, Y sono connessi per archi $\Longleftrightarrow$ $X \times Y$ è connesso per archi.*

Dim. $\Leftarrow$) Le proiezioni sono applicazioni continue.
$\Rightarrow$) Per collegare (x_0, y_0) a (x_1, y_1) si considera il prodotto del cammino in $X \times \{y_0\}$ che unisce (x_0, y_0) ad (x_1, y_0) composto con l'inclusione e del cammino in $\{x_1\} \times Y$ che unisce (x_1, y_0) ad (x_1, y_1) composto con l'inclusione. □

Proposizione. *Se X è connesso per archi, allora è anche connesso.*

Dim. Fissiamo un punto $x \in X$; per ogni $y \in X$ esiste un arco $\gamma_y : \mathbf{I} \to X$ che congiunge x a y; sia $\Gamma_y = \gamma_y([0, 1])$.
Lo spazio X si può scrivere come unione di connessi a intersezione non vuota $X = \bigcup_{y \in X} \Gamma_y$; infatti Γ_y è connesso in quanto immagine del connesso $\mathbf{I}$ tramite applicazione continua, e $\bigcap_{y \in Y} \Gamma_y \neq \emptyset$. poichè $x \in \bigcap_{y \in Y} \Gamma_y$.
Si applica quindi la proposizione sulle unioni di connessi. □

Esempio. Non vale il viceversa: in $\mathbb{R}^2$ consideriamo il sottoinsieme $A = \{(0, 1)\}$ (la pulce) e il sottoinsieme $B = \{\mathbf{I} \times \{0\} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times \mathbf{I}\}$ (il pettine); Il sottoinsieme $A \cup B$ è connesso (si usa la proposizione sulla chiusura di connessi), ma non è connesso per archi.

4.5 Riassunto

	Compattezza	Hausdorff	Connessione
Sottospazi	No[1]	Sì	No[2]
Prodotti	Sì	Sì	Sì
Quozienti	Sì	No[3]	Sì
Omeomorfismi	Sì	Sì	Sì

[1] $(0, 1) \subset [0, 1]$
[2] $(0, 1) \cup (1, 2) \subset \mathbb{R}$
[3] $\mathbb{R}/(0, 1)$ (Sì se X è compatto e π è chiusa)

5

Superfici topologiche

5.1 Varietà topologiche

Definizione. Uno spazio topologico X si dice localmente euclideo se ogni suo punto x ha un intorno aperto U_x omeomorfo a $\mathring{\mathbf{D}}^n$. Sia $\varphi_x : U_x \to \mathring{\mathbf{D}}^n$ l'omeomorfismo; la coppia (U_x, φ_x) è detta carta locale, U_x è detto dominio della carta locale.

Fatto. Se x appartiene ai domini di due diverse carte locali, n non cambia. (Teorema di invarianza della dimensione).

Osservazione. Se X è connesso, allora n è lo stesso per tutti i punti, e viene detto dimensione di X.

Dim. Sia $p \in X$ un punto con un intorno aperto omeomorfo a $\mathring{\mathbf{D}}^n$, e sia $W = \{q \in X \mid q \text{ ha un intorno omeomorfo a } \mathring{\mathbf{D}}^n\}$; W non è vuoto, è aperto ed il suo complementare è aperto. □

Definizione. Uno spazio topologico connesso, di Hausdorff e localmente euclideo si dice varietà topologica.

Osservazione. Poiché una varietà topologica è connessa, la sua dimensione è ben definita.

Osservazione. E' necessario richiedere che una varietà topologica sia uno spazio di Hausdorff, in quanto tale condizione non è conseguenza dell'essere localmente euclideo.

Esempio.

1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.
2. $\mathbf{S}^n$, $\mathring{\mathbf{D}}^n$.
3. Toro, Bottiglia di Klein, cilindro aperto, nastro di Moebius aperto.
4. $\mathbb{RP}^n$.
5. Il prodotto di due varietà topologiche.

Proposizione. *Uno spazio topologico connesso e localmente euclideo è connesso per archi.*

Dim. Fissiamo $p \in X$ e sia $W = \{q \in X \mid \text{ esiste un arco congiungente } p \text{ a } q\}$; W non è vuoto, è aperto ed ha il complementare aperto. □

In dimensione 1 la classificazione delle varietà topologiche è molto semplice:

Teorema. *Una varietà topologica di dimensione* 1 *(a base numerabile) è omeomorfa a* $\mathbf{S}^1$ *o a* $\mathbb{R}$.

La situazione è molto più complessa già per $n = 2$, e questo è il caso che studieremo. Da ora in poi ci occuperemo cioè solo di superfici topologiche compatte, cioè di varietà topologiche compatte di dimensione 2.

5.2 Somma connessa

Siano S_1 e S_2 due superfici compatte; fissiamo due punti $x \in S_1$, $y \in S_2$ e due intorni U_x e U_y omeomorfi a $\mathbf{D}^2$; è definito perciò un omeomorfismo

$$h : \partial U_x \to \partial U_y$$

Sia $Y = (S_1 \backslash \mathring{U}_x) \amalg (S_2 \backslash (\mathring{U}_y))$ e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza

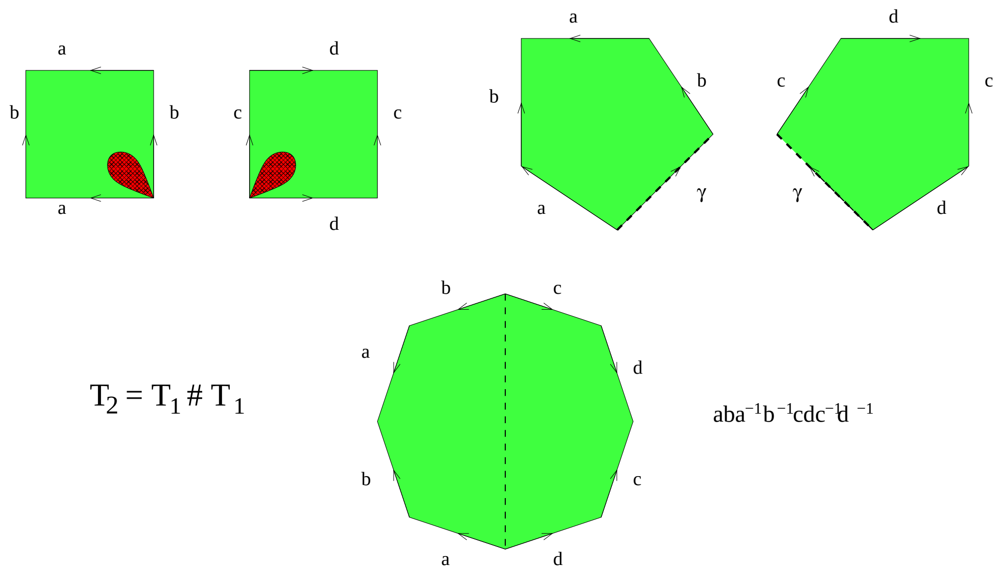
$$x' \sim y' \Longleftrightarrow x' \in \partial(U_x),\ y' \in \partial(U_y) \quad \text{e} \quad y' = h(x')$$

Lo spazio topologico quoziente $S = Y/\sim$ è uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, localmente euclideo di dimensione 2 e compatto; S è una superficie compatta, detta somma connessa di S_1 ed S_2:

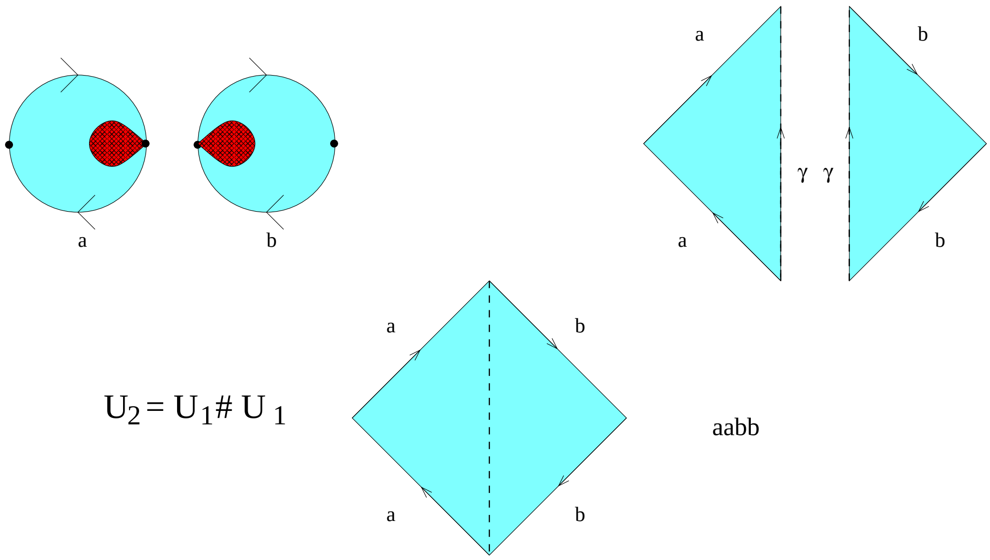
$$S = S_1 \# S_2.$$

Osservazione. La somma connessa è definita a meno di classi di omeomorfismo.

Definizione. Indichiamo con T_g la superficie che si ottiene facendo somma connessa di g tori, e con T_0 la sfera.



Definizione. Indichiamo con U_h la superficie che si ottiene facendo somma connessa di h piani proiettivi reali.



5.3 Triangolazioni

Definizione. Un triangolo geometrico in X è un'applicazione $\tau : T' \to X$ che sia un omeomorfismo sull'immagine, dove T' è un triangolo di $\mathbb{R}^2$. Con abuso di linguaggio chiameremo triangolo geometrico anche l'immagine di τ.

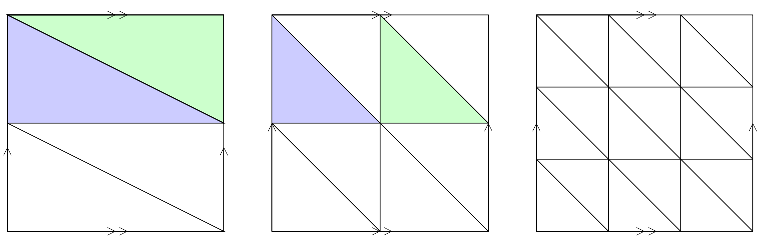
Definizione. Una triangolazione di una superficie topologica X è una collezione di triangoli geometrici che ha le seguenti proprietà:

- Ogni punto di X appartiene ad un triangolo.
- Se P è interno ad un triangolo, allora appartiene solo a quello.
- Se P è interno ad un lato, allora appartiene a due triangoli che si tagliano solo in quel lato e la cui unione costituisce un intorno di P.
- Se P è un vertice allora appartiene ad un numero finito di triangoli di cui è vertice e la cui unione è un intorno di P.
- Se due triangoli hanno due vertici in comune, allora hanno in comune il lato delimitato da essi.

Osservazione. Non ogni superficie topologica è triangolabile.

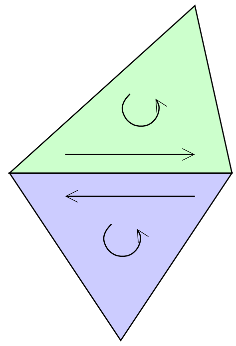
Teorema. *(Teorema di Radò) Ogni superficie compatta ammette una triangolazione finita.*

Esempio. Il toro è triangolabile. Le prime due non sono triangolazioni (ci sono triangoli con due lati in comune o con due vertici in comune senza il lato corrispondente in comune), la terza sì.



5.4 Orientabilità

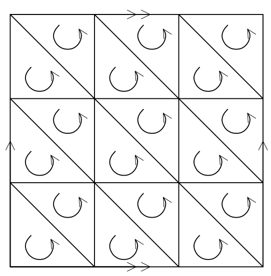
Un'orientazione di un triangolo geometrico τ è uno dei (due) versi di percorrenza dei suoi vertici. Un'orientazione di τ induce un'orientazione dei sui spigoli.
Due triangoli adiacenti di una triangolazione si dicono coerentemente orientati se le loro orientazioni inducono orientazioni opposte sullo spigolo comune.



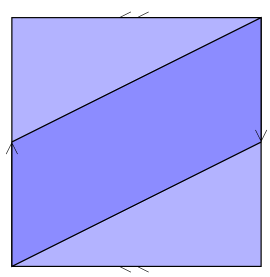
Definizione. Una superficie compatta X si dice orientabile se ammette una triangolazione coerentemente orientata.

Proposizione. *Sia X una superficie triangolabile. Allora X è orientabile se e solo se X non contiene nastri di Moebius.*

Esempio. Il toro è orientabile.



Esempio. La bottiglia di Klein non è orientabile.



Osservazione. Si può verificare che la somma connessa S di due superfici S_1 e S_2 è orientabile se e solo se S_1 ed S_2 sono orientabili.

5.5 Teorema di classificazione I

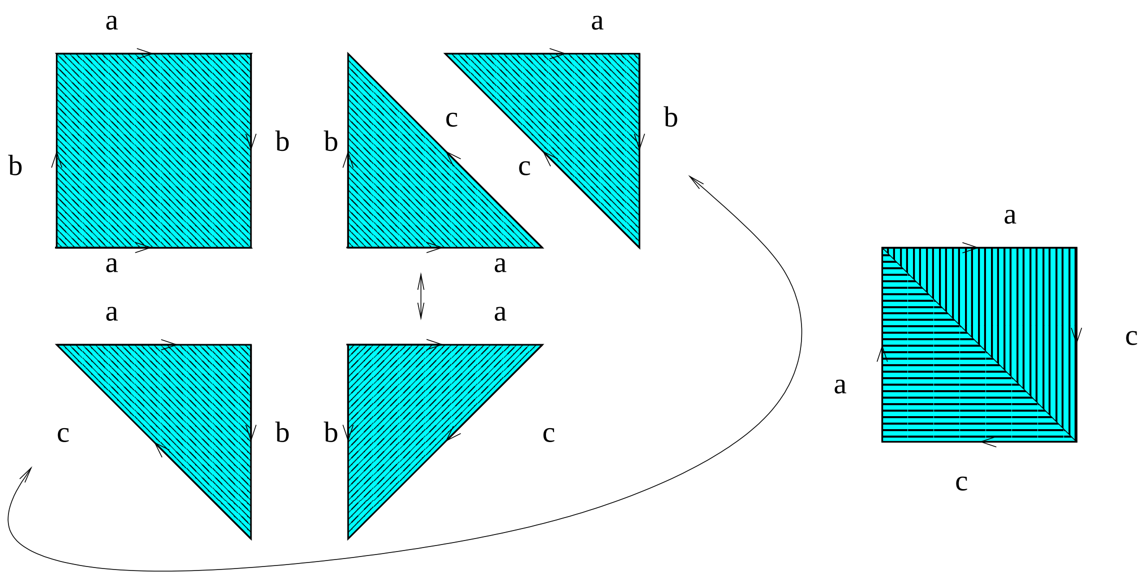
Siamo ora in grado di enunciare il teorema di classificazione delle superfici compatte:

Teorema. *(Teorema di classificazione) Sia S una superficie compatta.*

$$\begin{array}{cc} S \text{ orientabile} \Rightarrow S \simeq T_g & g \geq 0. \\ S \text{ non orientabile} \Rightarrow S \simeq U_h & h \geq 1. \end{array}$$

Inoltre se $g \neq g'$ allora $T_g \not\simeq T_{g'}$ e se $h \neq h'$ allora $U_h \not\simeq U_{h'}$.

Esempio. La bottiglia di Klein è omeomorfa alla somma connessa di due piani proiettivi.

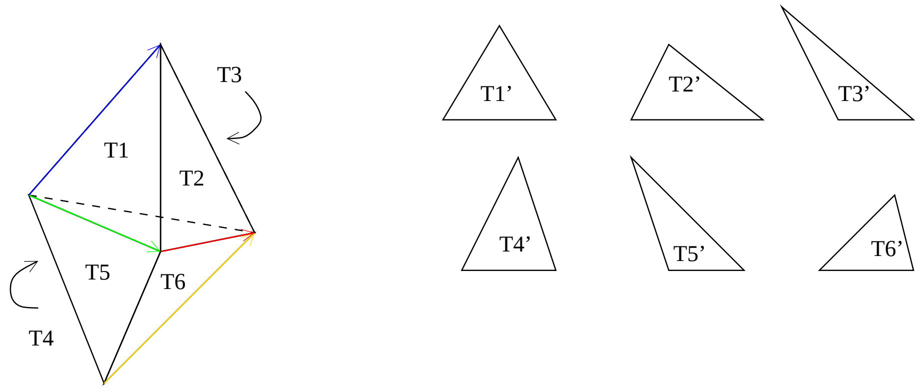


Dimostrazione della prima parte.

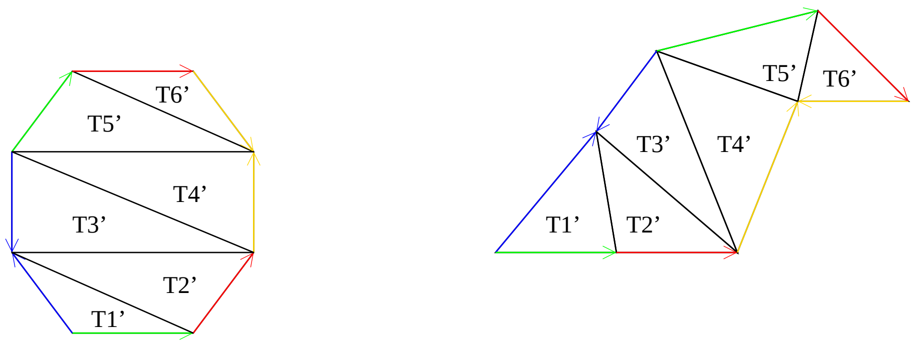
Passo 1 Ogni superficie compatta è quoziente di un poligono piano:

Lemma. *Sia S una superficie compatta. Allora S è omeomorfa a un poligono di $\mathbb{R}^2$ con i lati identificati a coppie.*

Dim. (Cenno) Una superficie compatta ammette una triangolazione finita. Siano $T_1, \ldots, T_n$ i triangoli di tale triangolazione, ordinati in modo che il triangolo T_i abbia uno spigolo in comune con uno dei triangoli precedenti $T_1, T_2, \ldots T_{i-1}$.
Siano $T_1', \ldots, T_n'$ i triangoli di $\mathbb{R}^2$ che vengono mappati su $T_1, \ldots, T^n$, e supponiamo che $T_1', \ldots, T_n'$ siano a coppie disgiunti.
Sia $T' = \bigcup_{i=1}^n T_i$ l'unione di questi triangoli.



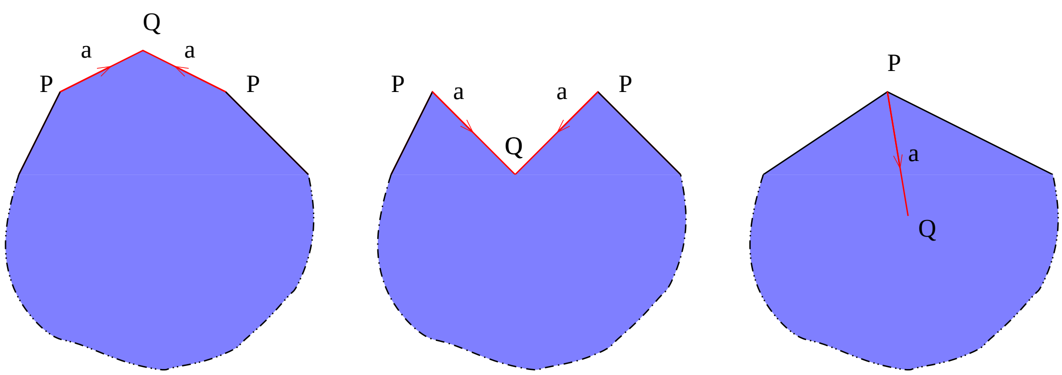
Introduciamo ora una relazione di equivalenza in T' in questo modo: T_2 ha uno spigolo in comune con T_1, per cui incolliamo T_1' e T_2' lungo lo spigolo corrispondente; T_3 ha uno spigolo in comune con $T_1 \cup T_2$, quindi incolliamo T_3' a $T_1' \cup T_2'$ lungo lo spigolo corrispondente, eccetera; otteniamo così un poligono i cui lati al bordo devono essere identificati a coppie.



□

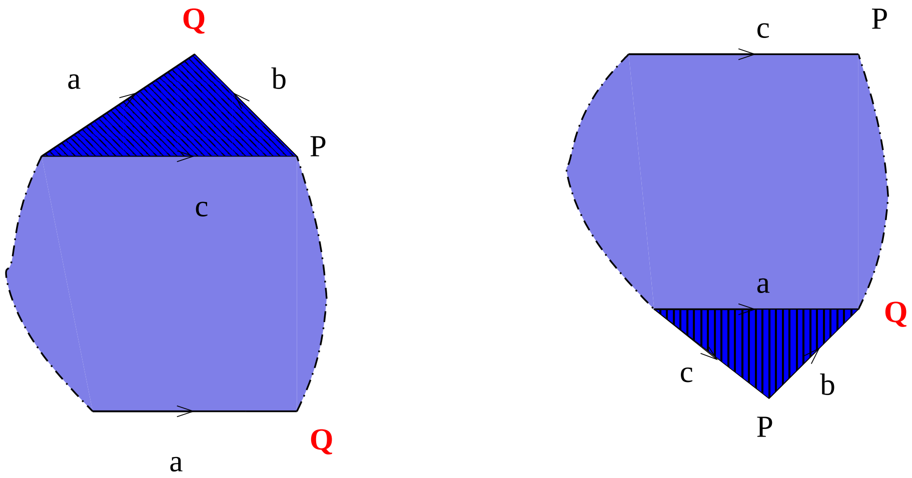
Passo 2: Eliminazione delle coppie adiacenti del primo tipo.

Abbiamo visto che una superficie compatta è omeomorfa ad un poligono di $\mathbb{R}^2$ con i lati identificati a coppie. Diremo che una coppia è del **primo tipo** se i lati che la compongono compaiono con l'orientazione opposta, del **secondo tipo** altrimenti.
In figura vediamo come sia possibile eliminare coppie adiacenti del primo tipo se il poligono ha almeno quattro lati. Se il poligono ha solamente due lati ci sono due possibilità: o è del tipo aa^{-1} e quindi una sfera, o è del tipo aa e quindi un piano proiettivo reale.



Passo 3: Riduzione dei vertici ad un unico nome.

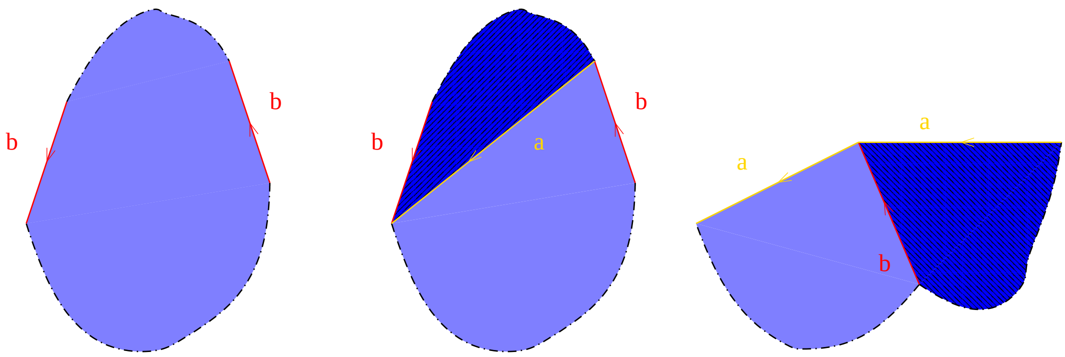
Supponiamo di aver ripetuto il secondo passo finché è stato possibile; i vertici del poligono non sono necessariamente tutti identificati tra di loro, ma possono appartenere a diverse classi di equivalenza. Mostriamo ora, come con una serie di operazioni successive è possibile arrivare ad un nuovo poligono in cui tutti i vertici appartengono ad un'unica classe di equivalenza.
Le operazioni mostrate in figura fanno diminuire i vertici nella classe di equivalenza di Q di un'unità e fanno aumentare i vertici nella classe di equivalenza di P di un'unità.



Alternando il passo 2 ed il passo 3 (perché è necessario il passo 2?) arriviamo ad un poligono in cui tutti i vertici devono essere identificati e in cui non sono presenti coppie adiacenti del primo tipo.

Passo 4: Rendere adiacenti le coppie del secondo tipo.

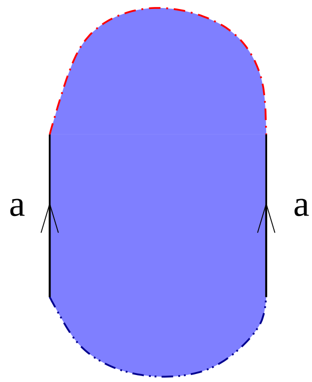
Vogliamo mostrare che è possibile rendere adiacenti tutte le coppie del secondo tipo. Per far ciò, per ogni coppia non adiacente del secondo tipo operiamo un taglio tra gli estremi finali della coppia scelta, come in figura, ed incolliamo in corrispondenza della coppia medesima.



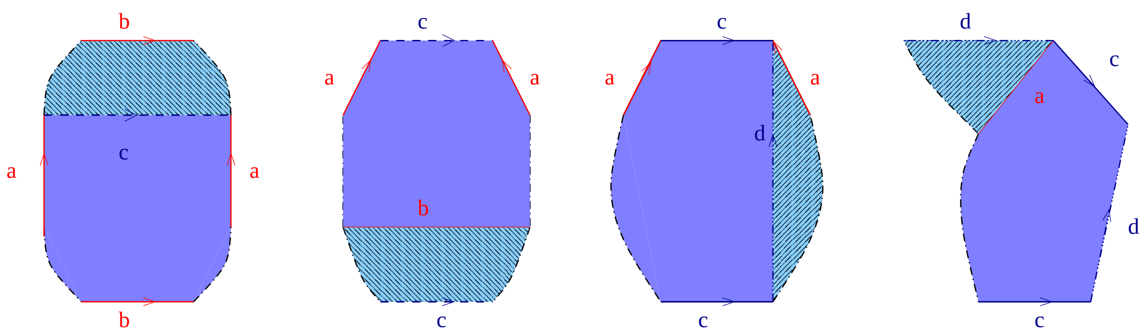
Se nel poligono ci sono solo coppie del secondo tipo, dopo un numero finito di applicazioni del passo 4 otteniamo una superficie il cui poligono è del tipo $a_1a_1 \ldots a_ha_h$, cioè una superficie U_h, e abbiamo finito. Nel caso che ci siano coppie del primo tipo continuiamo con il

Passo 5: Raggruppare le coppie del primo tipo.

Supponiamo quindi che ci sia almeno una coppia del primo tipo. In tal caso ne deve esistere un'altra tale che queste due coppie si separano a vicenda. Infatti, se così non fosse, ci troveremmo in una situazione come quella in figura, in cui tutti i lati nella parte rossa si identificano con lati nella parte rossa e tutti i lati nella parte blu si identificano con lati nella parte blu.



Questa situazione non è possibile, perché in tal caso i due estremi di a non vengono identificati, in contraddizione con il passo 3.
Pertanto esistono due coppie del primo tipo che si separano a vicenda come in figura, e tali coppie possono essere raggruppate tagliando due volte in corrispondenza degli estremi finali dei lati.



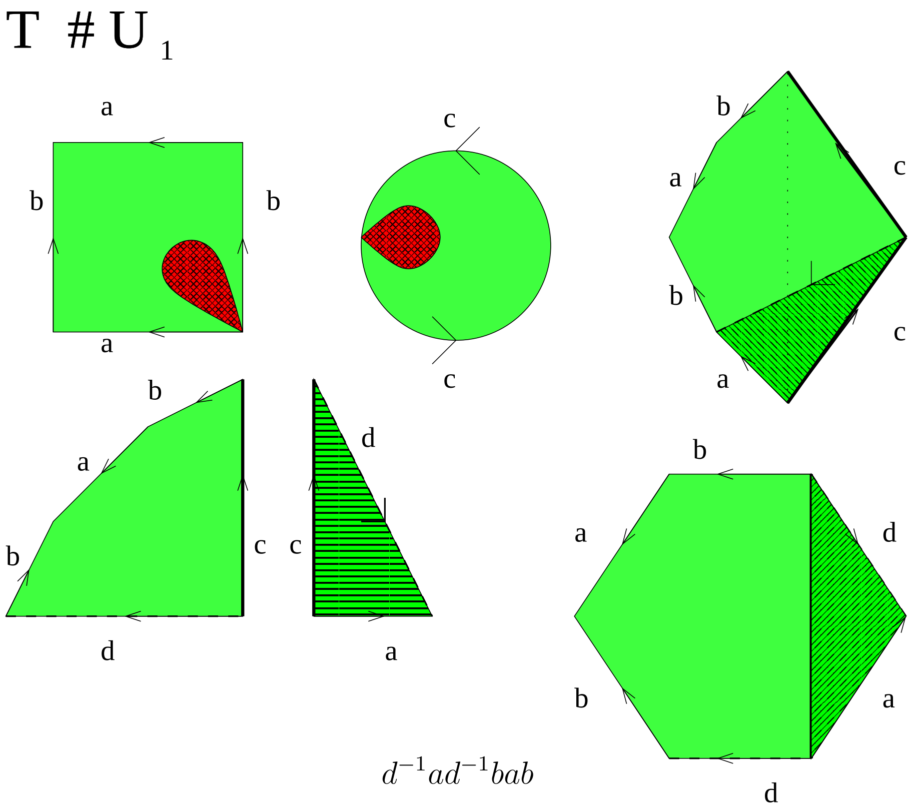
Se nel poligono compaiono solo coppie del primo tipo, dopo un numero finito di applicazioni del passo 5 otteniamo una superficie il cui poligono è del tipo $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, cioè una superficie T_g, e abbiamo finito. Resta aperto il caso in cui nel poligono compaiano coppie del primo e del secondo tipo, cioè che il poligono sia del tipo $\dots a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}cc\dots$. Tale caso viene risolto dal seguente lemma

Lemma. *La somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi.*

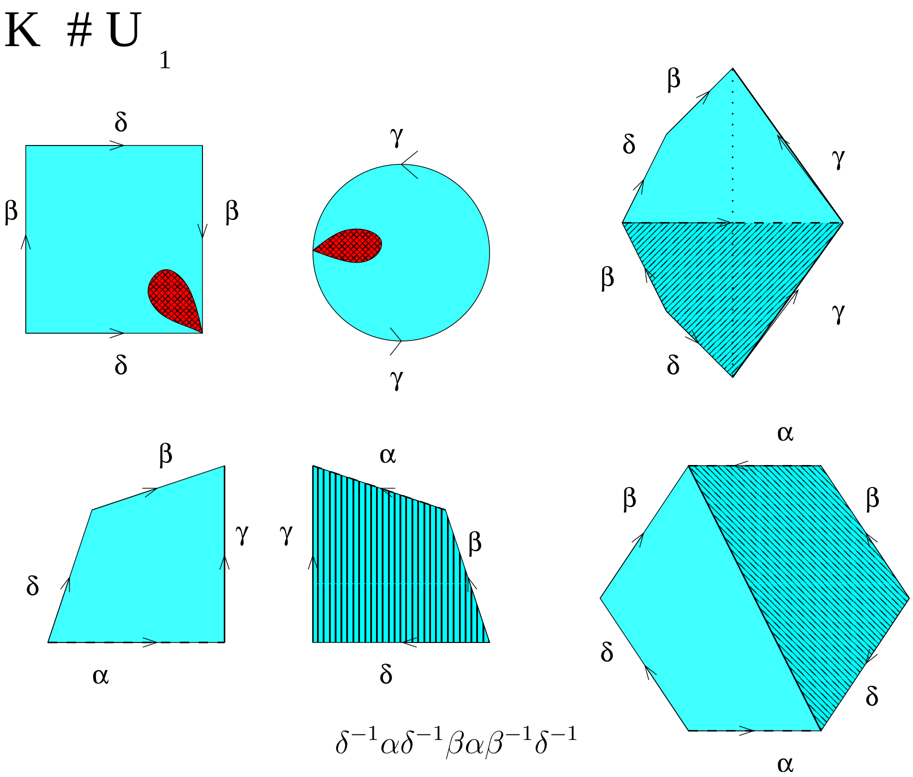
Dim. Abbiamo già visto che la bottiglia di Klein è omeomorfa alla somma di due piani proiettivi, quindi basta mostrare che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di una bottiglia di Klein e di

un piano proiettivo.
Mostreremo che entrambe sono omeomorfe alla superficie quoziente del poligono

$$d^{-1}ad^{-1}bab$$



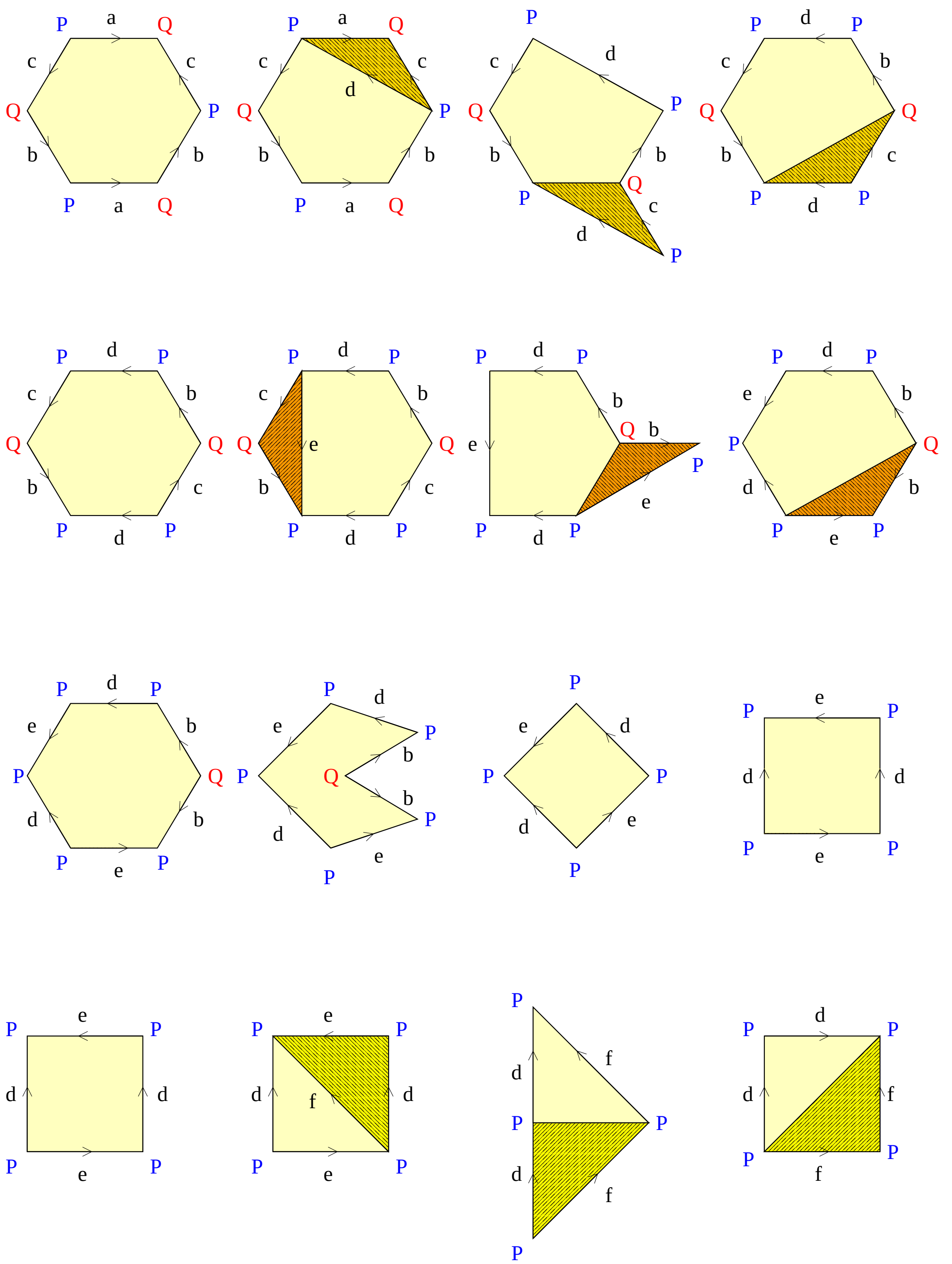
$d^{-1}ad^{-1}bab$



$\delta^{-1}\alpha\delta^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\delta^{-1}$

Esempio. Concludiamo con un esempio di applicazione dei passi della dimostrazione del teorema: classificare la superficie il cui poligono rappresentativo è il seguente:

$$abca^{-1}cb.$$



La superficie in esame è omeomorfa alla superficie U_2.

Parte II

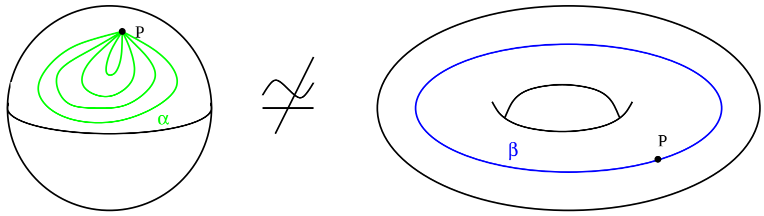
Topologia algebrica

6

Omotopia

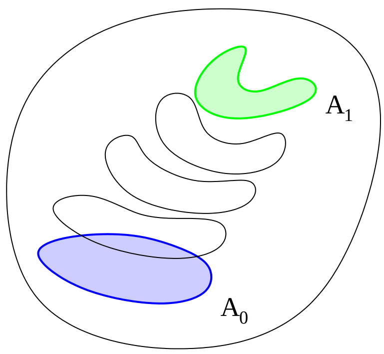
6.1 Omotopia di applicazioni continue

Il toro e la sfera non sono omeomorfi. Come si può dimostrare? La sfera ha la proprietà che ogni cammino chiuso può essere deformato con continuità al cammino costante, mentre nel toro questo non è sempre vero. Vedremo ora come si può formalizzare questo concetto.



Problema: Dati A_0, A_1 sottospazi di uno spazio topologico X si vuole formalizzare l'idea seguente:

$$A_1 \text{ si ottiene per deformazione continua da } A_0.$$



Definizione. Siano $f_0, f_1 : X \to Y$ due applicazioni continue. f_0 ed f_1 si dicono omotope se $\exists F : X \times \mathbf{I} :\to Y$ continua tale che $\forall x \in X$ si ha $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$. In tal caso scriviamo $f_0 \sim f_1$; poniamo poi $f_t(x) = F(x,t)$. Abbiamo cioè una famiglia di funzioni continue che varia con continuità.

Esempi.

1. $X = Y = \mathbb{R}^n$, $f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, $f_1 = \underline{0}$, $F(x,t) = (1-t)\underline{x}$.

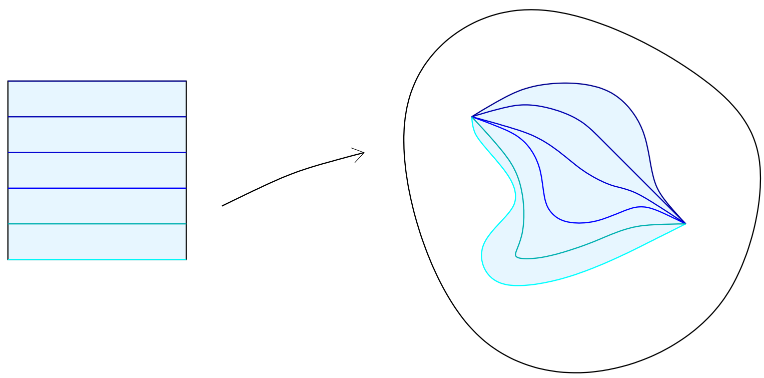
2. $X = Y = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, $f_1(\underline{x}) = \dfrac{x}{||\underline{x}||}$, $F(x,t) = (1-t)\underline{x} + t\dfrac{x}{||\underline{x}||}$.
3. Ogni arco $f : \mathbf{I} \to X$ di punto iniziale x_0 è omotopo all'arco costante di base x_0. $F(s,t) = f((1-t)s)$

Come mostra il terzo esempio l'omotopia non è ancora la nozione adeguata a descrivere l'esempio dei cammini sulla sfera e sul toro. In quel caso, infatti, tutti i cammini intermedi devono avere lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Introduciamo quindi una nuova definizione:

Definizione. Siano $f_0, f_1 : X \to Y$ applicazioni continue, e $A \subset X$ un sottospazio. f_0 e f_1 si dicono omotope relativamente ad A se esiste un'omotopia $F : X \times \mathbf{I} \to Y$ tale che $F(a,t) = f_0(a) = f_1(a) \quad \forall t$.

In particolare, nel caso dei cammini, avremo la seguente

Definizione. Due cammini che abbiano lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale si dicono omotopi se sono omotopi relativamente a $\{0,1\}$.



Quindi due cammini $\alpha : \mathbf{I} \to X$ e $\beta : \mathbf{I} \to X$ sono omotopi se esiste $F : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to X$ tale che

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \alpha(s) \\ F(s,1) &= \beta(s) \\ F(0,t) &= \alpha(0) = \beta(0) = x_0 \\ F(1,t) &= \alpha(1) = \beta(1) = x_1 \end{aligned}$$

Osservazione. L'omotopia (relativa) è una relazione d'equivalenza.

6.2 Tipo d'omotopia - Retratti

Sospendiamo momentaneamente il discorso sui cammini e utilizziamo le nozioni sull'omotopia per introdurre un nuovo concetto di equivalenza per spazi topologici.

Definizione. Si dice che due spazi topologici X e Y hanno lo stesso tipo d'omotopia se esistono due applicazioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$.

Definizione. Uno spazio topologico si dice contraibile se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

Esempi.

1. Due spazi omeomorfi hanno lo stesso tipo di omotopia.
2. $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \sim \mathbf{S}^{n-1}$. Ad esempio considerando come $f : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ l'inclusione, e come $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbf{S}^{n-1}$ la funzione $g(\underline{x}) = \dfrac{\underline{x}}{||\underline{x}||}$.
3. $\mathbb{R}^n$ è contraibile. Consideriamo $f : \mathbb{R}^n \to \{\underline{0}\}$ l'applicazione costante e $g : \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^n$ l'inclusione.

Definizione. Una proprietà omotopica è una proprietà invariante per equivalenze omotopiche.

Definizione.

1. Un sottospazio $A \subset X$ si dice retratto di X se esiste un'applicazione continua $r : X \to A$ tale che $r \circ i = \mathrm{Id}_A$.
2. $A \subset X$ si dice retratto di deformazione se esiste un'applicazione continua $r : X \to A$ tale che $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ e $i \circ r \sim \mathrm{Id}_X$.
3. $A \subset X$ si dice retratto forte di deformazione se esiste un'applicazione continua $r : X \to A$ tale che $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ e $i \circ r \sim_A \mathrm{Id}_X$.

Osservazione. Se A è retratto di deformazione di X, allora A ha lo stesso tipo di omotopia di X.

Osservazione. Sia X un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e sia A un sottospazio di X.
Se esiste una retrazione $r : X \to A$ tale che per ogni $x \in X$ il segmento che unisce il punto x al punto $r(x)$ è tutto contenuto in X, allora l'applicazione

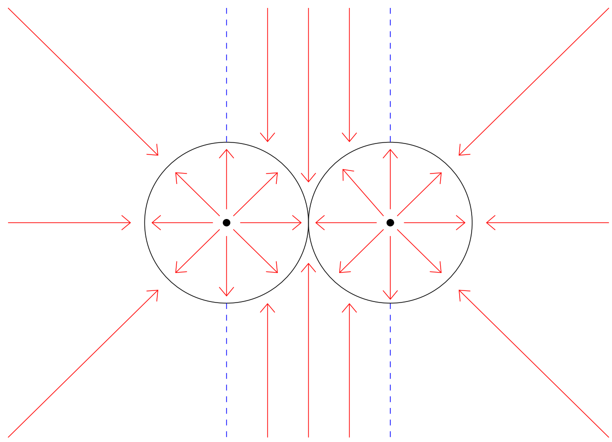
$$F : X \times \mathbf{I} \to X$$

$$(x, t) \mapsto (1 - t)x + t(i \circ r(x))$$

è un'omotopia relativa ad A tra Id_X e $i \circ r$.
Pertanto se esiste r siffatta, A è retratto forte di deformazione di X.

Esempi.

1. Un sottospazio stellato di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.
2. $\mathbb{R}^2 \backslash \{P_1, \ldots P_k\}$ ha $\vee_{1,\ldots k} \mathbf{S}^1$ come retratto forte di deformazione.



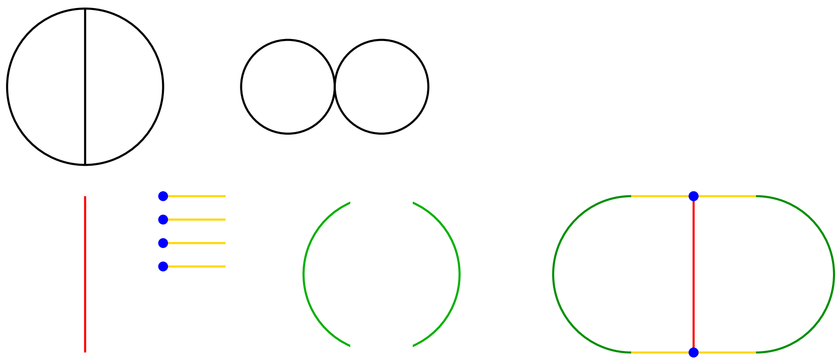
3. $\mathbb{R}^3 \backslash r$ ha $\mathbf{S}^1$ come retratto forte di deformazione. La retrazione è data componendo la proiezione sul piano perpendicolare alla retta con la retrazione di $\mathbb{R}^2$ meno un punto su $\mathbf{S}^1$.

4. Se X è un poligono di $\mathbb{R}^2$ con $2k$ lati identificati a coppie, allora $X \setminus \{P\}$, dove P è un punto interno al poligono ha un bouquet di k circonferenze come retratto forte di deformazione.
   Infatti il poligono meno il punto ha il bordo come retratto forte di deformazione, e la retrazione e l'omotopia $i \circ r \sim_A \mathrm{Id}_X$ passano al quoziente (esercizio!). In particolare $\mathbb{RP}^2 \setminus \{P\} \sim \mathbf{S}^1$ e $T_1 \setminus \{P\} \sim \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$.

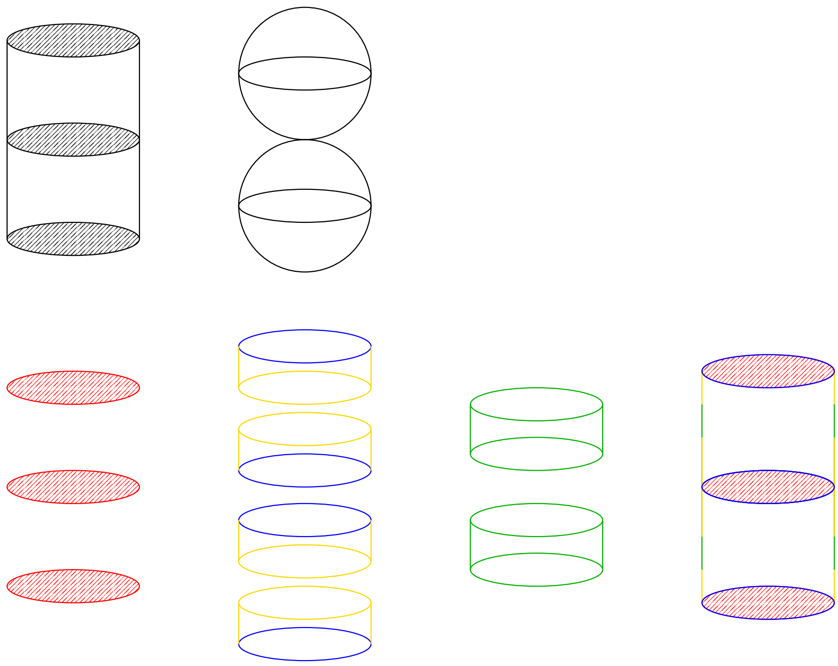
Proposizione. *Siano C, Y spazi topologici, A uno spazio topologico contraibile, $J = [0, 2]$ con la topologia euclidea, $f : C \to Y, g : C \to A$ applicazioni continue. Sia $Z = Y \sqcup (C \times J) \sqcup A)$ e sia $\sim$ la relazione d'equivalenza in Z definita ponendo $(c, 0) \sim f(c), (c, 2) \sim g(c)$ e sia infine $X = Z/ \sim$.*
Allora X ha lo stesso tipo di omotopia di X/A.

Esempi. In questi esempi A è in rosso, C è in blu e Y in verde.

1.



2.



7

Il gruppo fondamentale

7.1 Il gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico e x_0 un suo punto.

Definizione. Un cammino $\alpha : \mathbf{I} \to X$ tale che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ è detto cappio di punto base x_0.

Consideriamo il seguente insieme

$$\pi(X, x_0) = \{\text{Classi di equivalenza di cappi omotopi con punto base } x_0\}$$

Per dimostrare che la sfera non è omeomorfa al toro dovremmo dimostrare che

- A spazi topologici omeomorfi corrisponde lo stesso insieme.
- $\pi(\mathbf{S}^2, x_0)$ e $\pi(T, x_0)$ sono insiemi diversi.

In realtà quello che faremo sarà di più: mostreremo innanzitutto che l'insieme $\pi(X, x_0)$ possiede una struttura di gruppo, e dimostreremo quindi che

- A spazi topologici omeomorfi corrispondono gruppi isomorfi.
- $\pi(\mathbf{S}^2, x_0)$ e $\pi(T, x_0)$ sono gruppi non isomorfi.

Definizione. Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto; sia $\pi(X, x_0) = \{$Classi di equivalenza di cappi omotopi con punto base $x_0\}$ e siano $[\alpha], [\beta] \in \pi(X, x_0)$. Si definisce il prodotto di $[\alpha]$ e $[\beta]$ nel seguente modo:

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

Il fatto che tale operazione sia ben definita segue dalla seguente

Proposizione. *(Omotopia di prodotti di cammini). Siano α e β due cammini in X tali che sia definito il prodotto $\alpha * \beta$, e siano γ e δ altri due cammini tali che $\alpha \sim \gamma$ e $\beta \sim \delta$; allora $\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$.*

Dim. Siano F e G le omotopie; allora l'omotopia tra i prodotti è data da

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & s \in [0,1/2] \\ G(2s-1,t) & s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

□

Teorema. *$\pi(X, x_0)$ è un gruppo (in generale non abeliano) rispetto al prodotto di classi di equivalenza di cappi appena definito.*

Il risultato segue dai tre lemmi seguenti. Daremo la dimostrazione solo del primo; gli altri due si provano in modo del tutto analogo.

Lemma. *(Associatività) Siano α, β e γ cammini tali che siano definiti i prodotti $\alpha * \beta$ e $\beta * \gamma$. Allora*

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

Lemma. *(Elemento neutro) Sia α un cammino con punto iniziale x_0 e punto finale x_1 e siano ε_{x_0} e ε_{x_1} i cammini costanti $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0$ e $\varepsilon_{x_1}(s) = x_1$. Allora*

$$\varepsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \varepsilon_{x_1}.$$

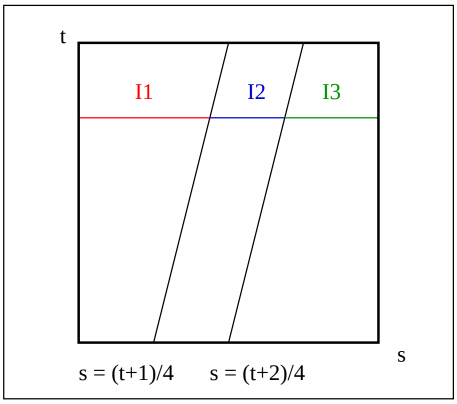
Lemma. *(Inverso) Sia α un cammino con punto iniziale x_0 e punto finale, x_1; siano ε_{x_0} e ε_{x_1} i cammini costanti $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0$ e $\varepsilon_{x_1}(s) = x_1$ e sia $\bar{\alpha}$ il cammino inverso. Allora*

$$\bar{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_{x_0} \qquad \alpha * \bar{\alpha} \sim \varepsilon_{x_1}.$$

Dim. (del primo lemma). Dobbiamo mostrare che $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ sono omotopi; questi due cammini si scrivono in questo modo

$$((\alpha*\beta)*\gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(4s) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4s-1) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (\alpha*(\beta*\gamma))(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s-2) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4s-3) & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

La figura mostra un modo di deformare i cammini uno nell'altro



Per scrivere le equazioni consideriamo omeomorfismi $f_i : I_i \to I$ e componiamo con α, β e γ; come omeomorfismi possiamo considerare quelli della forma

$$s' = \frac{s-a}{b-a}$$

otteniamo quindi l'omotopia cercata:

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4s}{t+1}\right) & s \in [0, \frac{t+1}{4}] \\ \beta(4s-t-1) & s \in [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}] \\ \gamma\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right) & s \in [\frac{t+2}{4}, 1] \end{cases}$$

□

Definizione. $\pi(X, x_0)$ è detto gruppo fondamentale o primo gruppo di omotopia di X con punto base x_0.

Esempio. Se $X = \{*\}$, allora $\pi(X,*) = \{\underline{0}\}$, in quanto esiste un unico cammino, quello costante.

Proposizione. *Siano x, y due punti di X; se esiste un arco $f : \mathbf{I} \to X$ che congiunge x a y allora $\pi(X,x) \simeq \pi(X,y)$.*

Dim. Definiamo l'applicazione $u_f : \pi(X,x) \to \pi(X,y)$ in questo modo:

$$u_f([\alpha]) = [\bar{f} * \alpha * f].$$

L'applicazione è ben definita: poichè ovviamente $\bar{f} \sim \bar{f}$ e $f \sim f$, applicando due volte la proposizione sull'omotopia di prodotti di cammini, otteniamo che, se $\alpha \sim \beta$, allora $\bar{f} * \alpha * f \sim \bar{f} * \beta * f$.
Mostriamo ora che u_f è un omomorfismo di gruppi.

$$\begin{aligned} u_f([\alpha][\beta]) &= u_f([\alpha * \beta]) = [\bar{f} * \alpha * \beta * f] = \\ &= [\bar{f} * \alpha * f * \bar{f} * \beta * f] = [\bar{f} * \alpha * f][\bar{f} * \beta * f] = u_f([\alpha])u_f([\beta]) \end{aligned}$$

La biunivocità di u_f segue dal fatto che $u_{\bar{f}} \circ u_f = \mathrm{Id}_{\pi(X,x)}$ e $u_f \circ u_{\bar{f}} = \mathrm{Id}_{\pi(X,y)}$. □

Corollario. *Se uno spazio X è connesso per archi, allora $\pi(X,x) \simeq \pi(X,y)$ $\forall x, y \in X$.*

7.2 Omomorfismo indotto e teorema di invarianza per omotopia

Sia $\varphi : X \to Y$ un'applicazione continua, e sia α un cappio di punto base x; $\varphi \circ \alpha$ è un cappio in Y con punto base $\varphi(x)$.
Si può verificare che $\alpha \sim \beta \implies \varphi \circ \alpha \sim \varphi \circ \beta$; infatti, se $F : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to X$ è un'omotopia tra α e β, allora $G = \varphi \circ F$ è un'omotopia tra $\varphi \circ \alpha$ e $\varphi \circ \beta$. E' quindi ben definita l'applicazione

$$\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Y, \varphi(x))$$

che associa ad una classe di equivalenza $[\alpha]$ la classe di equivalenza $[\varphi \circ \alpha]$; poichè $\varphi \circ (\alpha * \beta) = (\varphi \circ \alpha) * (\phi \circ \beta)$, φ_* è un omomorfismo di gruppi, infatti

$$\varphi_*([\alpha * \beta]) = [\varphi \circ (\alpha * \beta)]) = [(\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta)] = [(\varphi \circ \alpha)][(\varphi \circ \beta)] = \varphi_*([\alpha])\varphi_*([\beta])$$

Per come abbiamo definito φ_* è immediato verificare che, se abbiamo tre spazi topologici X, Y, Z e due applicazioni continue $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to Z$, allora

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*;$$

Inoltre, se consideriamo $\mathrm{Id}_X : X \to X$, si ha che $\mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}_{\pi(X,x)}$.

Corollario. *Un omeomorfismo induce un isomorfismo di gruppi*

Possiamo riassumere quello che abbiamo detto dicendo che abbiamo costruito un funtore dalla categoria degli spazi topologici e applicazioni continue alla categoria dei gruppi e omomorfismi di gruppi.

$Top.$	Gr
(X, x)	$\pi(X, x)$
$\varphi : (X, x) \to (Y, y)$	$\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, y)$
$\psi \circ \varphi$	$\psi_* \circ \varphi_*$
Id_X	$\mathrm{Id}_{\pi(X,x)}$
$(X, x) \simeq (Y, y)$	$\pi(X, x) \simeq \pi(Y, y)$

Vogliamo ora mostrare che spazi che hanno lo stesso tipo di omotopia: useremo il seguente lemma, che diamo senza dimostrazione

Lemma. *Siano $\varphi, \psi : X \to Y$ continue e omotope; $f(t) = F(x_0, t)$ è un cammino che congiunge $\varphi(x_0)$ e $\psi(x_0)$. Allora il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\pi(X, x_0) \arrow[rr, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & & \pi(Y, \varphi(x_0)) \arrow[dl, "u_f"] \\
& \pi(Y, \psi(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

commuta, cioè $\psi_* = u_f \circ \varphi_*$.

Teorema. *(Teorema d'invarianza per omotopia). Siano X e Y spazi topologici, e sia $\varphi : X \to Y$ un'equivalenza omotopica.*
Allora $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo.

Dim. X e Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti, quindi esistono $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to X$ tali che $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{Id}_X$ e $\varphi \circ \psi \sim \mathrm{Id}_Y$. Sia F un'omotopia tra $\psi \circ \varphi$ e Id_X, e sia $f(t) = F(x, t)$; f è un arco che congiunge $\psi(\varphi(x))$ a x. Consideriamo il seguente diagramma:

$$(X, x) \xrightarrow{\varphi} (Y, \varphi(x)) \xrightarrow{\psi} (X, \psi(\varphi(x)))$$

$$\begin{tikzcd}
\pi(X, x) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{\pi(X,x)}"'] & \pi(Y, \varphi(x)) \arrow[r, "\psi_*"] & \pi(X, \psi(\varphi(x))) \arrow[dl, "u_f"] \\
& \pi(X, x) &
\end{tikzcd}$$

Poiché u_f è un isomorfismo, allora $\psi_* \circ \varphi_*$ è un isomorfismo; in particolare ψ_* é suriettiva.
Ripetiamo il ragionamento col diagramma

$$(Y, \varphi(x)) \xrightarrow{\psi} (X, \psi(\varphi(x))) \xrightarrow{\varphi} (Y, \varphi(\psi(\varphi(x))))$$

$$\begin{tikzcd}
\pi(Y, \varphi(x)) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{\pi(Y,\varphi(x))}"'] & \pi(X, \psi(\varphi(x))) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_*"] & \pi(Y, \varphi(\psi(\varphi(x)))) \arrow[dl, "u_g"] \\
& \pi(Y, \varphi(x)) &
\end{tikzcd}$$

Poiché u_g è un isomorfismo, allora $\widetilde{\varphi}_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo; in particolare ψ_* é iniettiva. Quindi ψ_* e φ_* sono isomorfismi. $\square$

Corollario. *Se X è contraibile, allora $\pi(X, x) \simeq \{\underline{0}\}$.*

Teorema. *(Gruppo fondamentale della circonferenza). Il gruppo fondamentale della circonferenza è isomorfo al gruppo ciclico infinito: $\pi(\mathbf{S}^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$.*
Un generatore è dato dalla classe del cammino $\alpha : \mathbf{I} \to \mathbf{S}$ così definito: $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

8

Teorema di Seifert-Van Kampen e applicazioni

8.1 Gruppi con presentazione

Gruppi liberi

Sia S un insieme; $S = \{x_i\}_{i\in I}$.

Definizione. Chiamiamo alfabeto l'insieme $\{x_i, x_i^{-1}\}_{i\in I}$ dove x_i^{-1} sono solo espressioni formali.

Definizione. Sia W l'insieme delle espressioni del tipo

$$x_{i_1}^{\varepsilon(i_1)} x_{i_2}^{\varepsilon(i_2)} \dots x_{i_n}^{\varepsilon(i_n)}$$

con $x_i \in S$ e $\varepsilon(i) = \pm 1$, dette parole. W comprende anche la parola vuota, che non contiene nessun simbolo; denoteremo la parola vuota con il simbolo 1.

Introduciamo ora una relazione d'equivalenza $\sim$ in W in questo modo. Diremo che w_1 e w_2 sono equivalenti se si possono ottenere l'una dall'altra introducendo o cancellando un numero finito di espressioni del tipo $x_i x_i^{-1}$ o $x_i^{-1} x_i$.
Sia $G = W/\sim$; tale insieme è un gruppo rispetto alla giustapposizione, ed è detto gruppo libero generato da S.

Esempi.

1. $S = \emptyset \qquad G = \{1\}$.
2. $S = \{x\} \qquad G = \{1, x, x^{-1}, xx, x^{-1}x^{-1}, \dots\} \simeq \mathbb{Z}$.
3. $S = \{a, b\} \qquad G = \{1, a, b, a^{-1}, b^{-1}, ab, ba, \dots\} =: \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (Prodotto libero). Non è abeliano.
4. In generale, se $\mathrm{card}(S) = n$, allora $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ è detto gruppo libero a n generatori. La sua struttura dipende solo dalla cardinalità di S, non dalla natura degli elementi di S.

Relazioni

Nell'insieme W delle parole, oltre alla relazione $\sim$, definita sopra, possiamo introdurre altre relazioni di equivalenza. Fissato un sottoinsieme $R \subset W$, diciamo che due elementi di W sono $R-$equivalenti

$$w_1 \sim_R w_2$$

se si ottengono uno dall'altro mediante un numero finito di operazioni del tipo

i) Inserire o cancellare xx^{-1} o $x^{-1}x$ con $x \in S$.
ii) Inserire o cancellare r o r^{-1} con $r \in R$.

L'insieme $W/\sim_R$ è un gruppo rispetto alla giustapposizione

$$[w_1]_R[w_2]_R = [w_1w_2]_R,$$

detto gruppo con presentazione $< S|R >$; l'insieme S si dice insieme dei generatori, mentre l'insieme R è l'insieme dei relatori.

Osservazione. $W \to W/\sim = G =< S|\emptyset > \to W/\sim_R =< S|R >$.
$< S|R >$ è il quoziente di $< S|\emptyset >$ rispetto al sottogruppo generato dalle classi di equivalenza degli elementi di R

Esempi.

1. $< \emptyset|\emptyset >= \{1\}$ Gruppo banale
2. $< x|x^n >= \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \simeq \mathbb{Z}_n$ Classi di resti modulo n.
3. $< x, y|xy = yx >\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
4. Ogni gruppo $(G, \cdot)$ è un gruppo con presentazione. Una presentazione è data da $< S_G|R_G >$, con $S_G = G$ e $R_G = \{(x \cdot y)y^{-1}x^{-1}\}$.

Osservazione. Lo stesso gruppo può avere diverse presentazioni.

8.2 Il teorema di Seifert-Van Kampen

Sia X uno spazio topologico, U_1 e U_2 due suoi aperti non vuoti e connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e connesso per archi; sia infine x_0 un punto di $U_1 \cap U_2$. Le inclusioni danno luogo al seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & U_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\ U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\ & U_2 \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

che induce un diagramma commutativo sui gruppi fondamentali

$$\begin{tikzcd} & \pi(U_1, x_0) \arrow[dr, "j_{1*}"] & \\ \pi(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "i_{1*}"] \arrow[dr, "i_{2*}"'] & & \pi(X, x_0) \\ & \pi(U_2, x_0) \arrow[ur, "j_{2*}"'] & \end{tikzcd}$$

Consideriamo delle presentazioni per $\pi(U_1, x_0), \pi(U_2, x_0), \pi(U_1 \cap U_2, x_0)$

$$\begin{aligned} \pi(U_1, x_0) &= < S_1|\ R_1 > \\ \pi(U_2, x_0) &= < S_2|\ R_2 > \\ \pi(U_1 \cap U_2, x_0) &= < S\ |\ R > \end{aligned}$$

Il Teorema di Seifert-Van Kampen ci permette di trovare il gruppo fondamentale di X conoscendo quello di U_1, quello di U_2 e quello di $U_1 \cap U_2$.
In particolare

> I generatori di $\pi(X, x_0)$ sono l'unione dei generatori di $\pi(U_1, x_0)$ e dei generatori di $\pi(U_2, x_0)$.

> Le relazioni di $\pi(X, x_0)$ sono l'unione delle relazioni di $\pi(U_1, x_0)$, delle relazioni di $\pi(U_2, x_0)$ e di un insieme di relazioni R_S costruito a partire dai generatori di $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$.

Vediamo ora come si costruisce l'insieme R_S. Preso un elemento $s \in \pi(U_1 \cap U_2, x_0)$, possiamo considerare le sue immagini $i_{1*}s \in \pi(U_1, x_0)$ e $i_{2*}s \in \pi(U_2, x_0)$ e denotiamo con "$i_{1*}s$" e "$i_{2*}s$" le parole corrispondenti.
In altre parole "$i_{1*}s$" è la parola che si ottiene scrivendo $i_{1*}s$ utilizzando gli elementi di S_1, cioè i generatori di $\pi(U_1, x_0)$ e analogamente con $i_{2*}s$.

$$R_S = \{\text{``}i_{1*}s\text{''}\,\text{``}(i_{2*}s\text{''})^{-1} | s \in S\}.$$

Riassumendo quanto detto finora:

Teorema. *(Seifert-Van Kampen) Sia X uno spazio topologico, U_1 e U_2 due suoi aperti non vuoti e connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2$ sia non vuoto e connesso per archi.*
Siano $\pi(U_1, x_0) =< S_1|\ R_1 >, \pi(U_2, x_0) =< S_2|\ R_2 >, \pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< S|\ R >$ e sia $R_S = \{\text{``}i_{1*}s\text{''}\text{``}(i_{2*}s\text{''})^{-1}|s \in S\}$. Allora

$$\pi(X, x_0) \simeq < S_1 \cup S_2|\ R_1 \cup R_2 \cup R_S > .$$

Esempi.

1. $X = \mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$; sia x_0 un punto sull'equatore, sia $0 < \epsilon << 1$ e siano

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 \mid z > -\varepsilon\},$$

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 \mid z < \varepsilon\}.$$

Gli insiemi U_i sono omeomorfi a dischi di dimensione 2, e perciò contraibili; quindi i loro gruppi fondamentali sono banali:

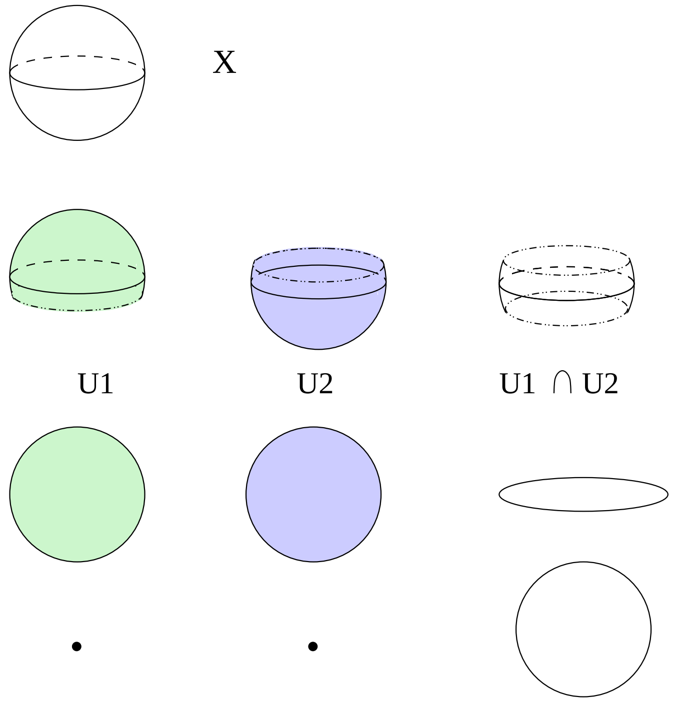
$$\pi(U_i, x_0) =< \emptyset|\ \emptyset > .$$

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ ha l'equatore come retratto forte di deformazione, quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< \alpha|\ \emptyset >,$$

dove α è un cammino che fa un giro sull'equatore. Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen otteniamo quindi

$$\pi(\mathbf{S}^2, x_0) =< \emptyset|\ \emptyset >$$

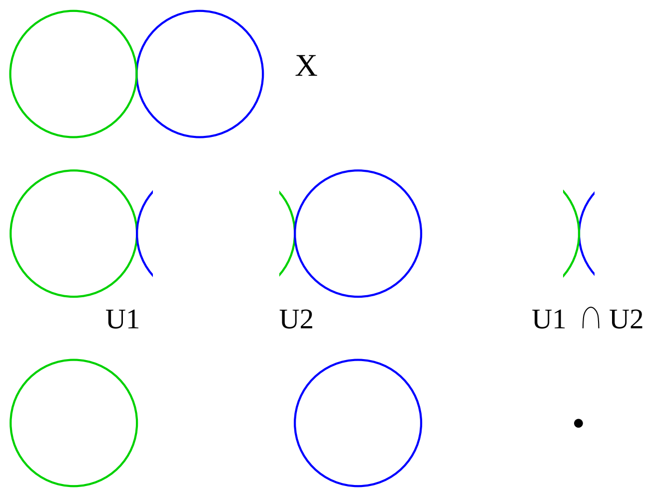


Possiamo osservare più in generale che, qualora i gruppi fondamentali $\pi(U_i, X_0)$ siano banali, allora anche il gruppo fondamentale di X sarà banale.

2. $X = \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1 = \{(x,y) \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} \vee \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$; sia $x_0 = (0,0)$ e sia $0 < \epsilon << 1$. Siano

$$U_1 = \{(x,y) \in X \mid x < \varepsilon\},$$

$$U_2 = \{(x,y) \in X \mid x > -\varepsilon\}.$$



Il gruppo fondamentale della circonferenza $\{(x,y) \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ è ciclico infinito generato dalla classe del cammino $\alpha(t) = (\cos(2\pi t) - 1, \sin(2\pi t))$; l'aperto U_1 ha tale circonferenza come retratto (forte) di deformazione, quindi abbiamo un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \pi(\mathbf{S}^1, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi(U_1, x_0) \\ [\alpha] & \longmapsto & [i_*\alpha] \end{array}$$

Denotando con abuso di linguaggio ancora con α il cammino $i \circ \alpha$ possiamo quindi concludere che

$$\pi(U_1, x_0) =< \alpha \mid \emptyset > .$$

Analogamente, denotato con β il cammino $\beta(t) = (\cos(2\pi t) + 1, \sin(2\pi t))$ avremo che

$$\pi(U_2, x_0) =< \beta \mid \emptyset > .$$

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ è contraibile, quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< \emptyset \mid \emptyset > .$$

Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen otteniamo

$$\pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, x_0) =< \alpha, \beta \mid \emptyset > \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Possiamo in generale osservare che, dati due spazi topologici (X, x_0) e (Y, y_0), con gruppi fondamentali $\pi(X, x_0) =< S_1 \mid R_1 >$ e $\pi(Y, y_0) =< S_2 \mid R_2 >$ e tali che x_0 e y_0 hanno un intorno contraibile in X e in Y rispettivamente, allora il gruppo fondamentale dello spazio topologico Z, unione a un punto di (X, x_0) e (Y, y_0) è dato da

$$\pi(Z, z_0) =< S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 > .$$

3. $X = K$; sia x_0 un punto interno al poligono e sia δ un cammino che congiunge il punto P, vertice del poligono con x_0.
   Sia $U_1 = K \backslash D$, ove D è un disco chiuso contenuto in K e che non contiene x_0, e sia $U_2 = K \backslash \{a, b\}$.
   L'aperto U_1 ha come retratto (forte) di deformazione il bordo di K, $\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$; abbiamo dunque isomorfismi

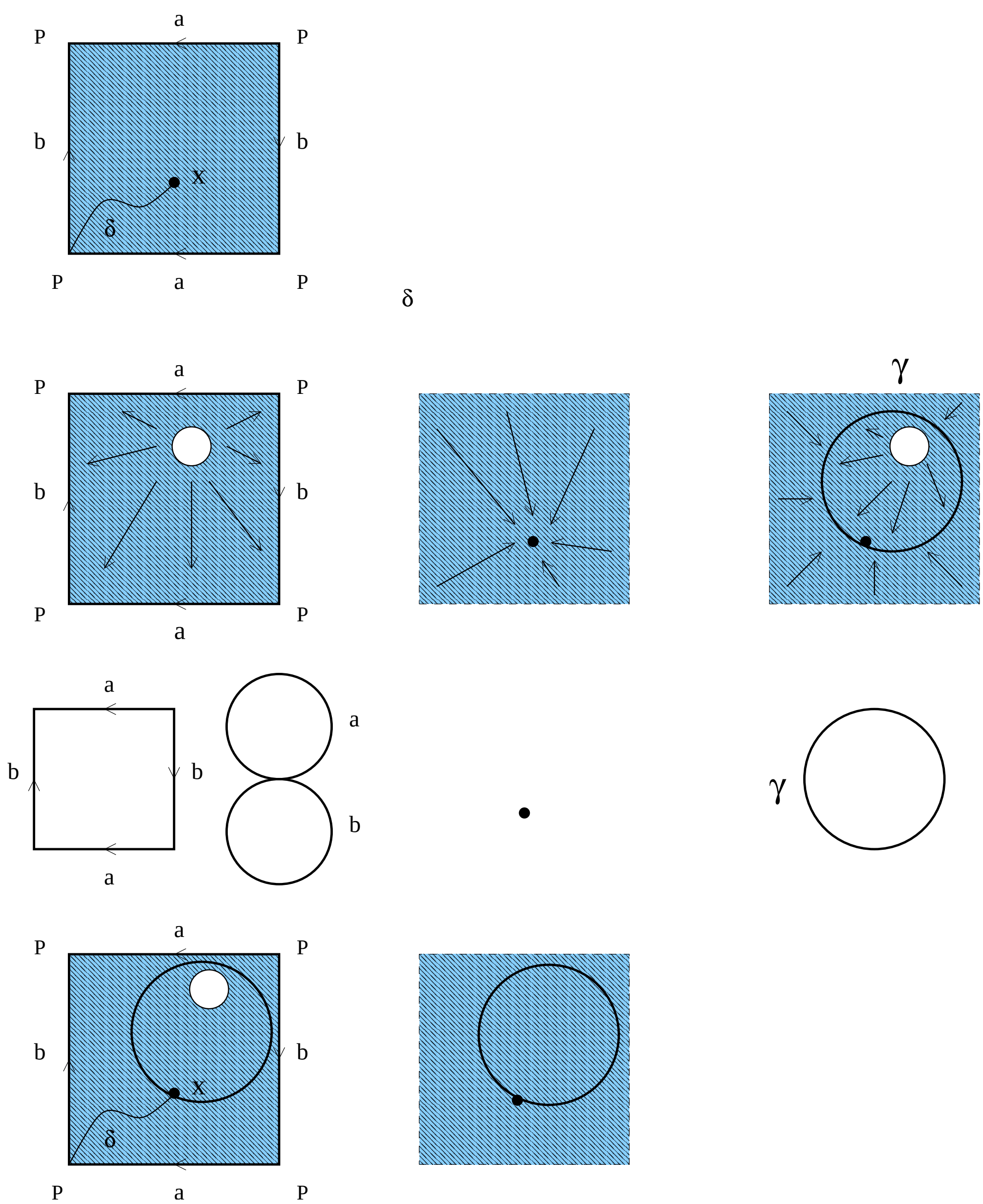
$$\begin{array}{ccccc} \pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, P) & \xrightarrow{i_*} & \pi(U_1, P) & \xrightarrow{u_\delta} & \pi(U_1, x_0) \\ [\gamma] & \longmapsto & [i_*\gamma] & \longmapsto & [\bar{\delta} i_* \gamma \delta] \end{array}$$

   Ricordando che $\pi(\partial K, P) =< a, b \mid \emptyset >$, e detti $\alpha = \bar{\delta} i_* a \delta$ e $\beta = \bar{\delta} i_* b \delta$ abbiamo che

$$\pi(U_1, x_0) =< \alpha, \beta \mid \emptyset > .$$

   L'aperto U_2 è contraibile, e perciò $\pi(U_2, x_0) =< \emptyset | \emptyset >$.
   L'intersezione $U_1 \cap U_2$ ha una circonferenza γ passante per x_0 come retratto (forte) di deformazione, e perciò, confondendo γ con $i_*\gamma$ possiamo scrivere

$$\pi(U_1 \cap U_2) =< \gamma | \emptyset > .$$



Vediamo ora di costruire l'insieme $R_S = \{\text{“}i_{1*}\gamma\text{”}\,\text{“}(i_{2*}\gamma)^{-1}\text{”}\}$.
Dobbiamo considerare la classe dell'immagine di γ in $\pi(U_1, x_0)$ e scriverla utilizzando i generatori di tale gruppo. Osserviamo che la retrazione $r : U_1 \to \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$ manda il cammino $i_{1*}\gamma$ nel cammino $ba^{-1}ba$, e quindi

$$\pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, P) \xrightarrow{i_*} \pi(U_1, P) \xrightarrow{u_\delta} \pi(U_1, x_0)$$

$$[ba^{-1}ba] \longmapsto [i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a] \longmapsto [\bar{\delta}i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a\delta]$$

Osserviamo quindi che $\bar{\delta}i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a\delta = \bar{\delta}i_*b\delta\bar{\delta}i_*a^{-1}\delta\bar{\delta}i_*b\delta\bar{\delta}i_*a\delta = \beta\alpha^{-1}\beta\alpha$.
Ripetiamo il procedimento con la classe dell'immagine di γ in $\pi(U_2, x_0)$. Poichè tale gruppo è banale, avremo che anche $i_{2*}\gamma$ sarà banale. $i_{2*}\gamma = 1$.
Possiamo quindi concludere che

$$\pi(K, x_0) =< \alpha\beta|\ \beta\alpha^{-1}\beta\alpha = 1 > .$$

8.3 Il teorema di classificazione delle superfici compatte II

Definizione. Dato un gruppo con presentazione $G =< S|R >$, il suo abelianizzato, $Ab(G)$ è il gruppo con presentazione

$$Ab(G) =< S|R \cup \{xyx^{-1}y^{-1}|x, y \in S\} >$$

Osservazione. Se G e G' sono gruppi isomorfi, allora $Ab(G)$ e $Ab(G')$ sono gruppi isomorfi.

Esempi.

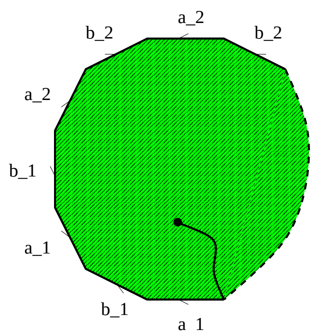
1. $G =< S|\emptyset >, S = x_1, \dots x_n$.
   $Ab(G) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \dots \oplus Z = \mathbb{Z}^{\oplus n}$
2. Nel caso $G_R =< S|R >$ con $S = x_1, \dots x_n$, allora $Ab(G_R)$ è un quoziente di $Ab(G_S) = \mathbb{Z}^{\oplus n}$
3. Sia $G =< a, b|aba^{-1}b >$; con la sostituzione $c = ab^{-1}$ $(b = ac)$ otteniamo una nuova presentazione $G =< a, c|aaca^{-1}ac >=< a, c|a^2c^2 >$.
   Con l'ulteriore sostituzione $d = ac$ $(c = a^{-1}d)$ troviamo la presentazione $G =< a, d|d^2 >$; con questa presentazione è più facile trovare l'abelianizzato:
   $$Ab(G) = (\mathbb{Z} < a > \oplus \mathbb{Z} < d >)/ < d^2 >\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Teorema. *(Teorema di classificazione) Sia S una superficie compatta.*

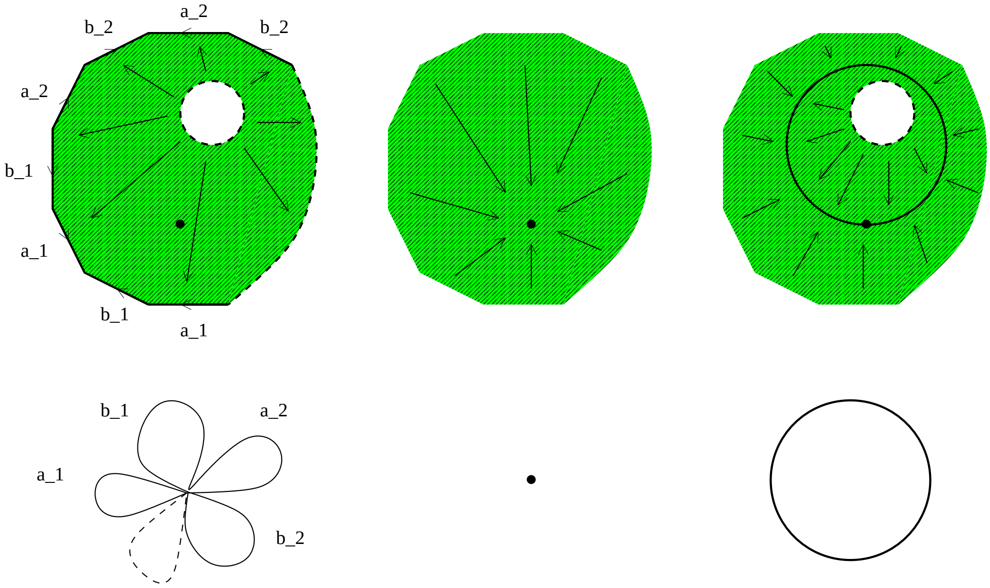
$$\begin{gathered} S \text{ orientabile} \Rightarrow S \simeq T_g \qquad g \geq 0. \\ S \text{ non orientabile} \Rightarrow S \simeq U_h \qquad h \geq 1. \end{gathered}$$

Inoltre se $g \neq g'$ allora $T_g \not\simeq T_{g'}$ e se $h \neq h'$ allora $U_h \not\simeq U_{h'}$.

Dim. (Seconda parte) Calcoliamo i gruppi fondamentali. Già sappiamo che $\pi(\mathbf{S}^2, x) \simeq \{1\}$; e che una superficie orientabile non è omeomorfa ad una superficie non oriantabile. Consideriamo dunque la superficie T_g con $g \geq 1$.



Per applicare il teorema di Seifert-Van Kampen scegliamo un punto x_0 interno al poligono e un cammino δ che congiunge il punto P, vertice del poligono, con x_0. Scegliamo poi come aperto U_1 la superficie T_g privata di un disco, e come aperto U_2 la superficie T_g meno il bordo del poligono.



L'aperto U_1 ha il bordo del poligono, che è un bouquet di $2g$ circonferenze, come retratto forte di deformazione; detti $\alpha_i = \bar{\delta} a_i \delta$ e $\beta_i = \bar{\delta} b \delta$ e procedendo come nell'esempio 3 abbiamo che

$$\pi(U_1, x_0) =< \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g | \ \emptyset > .$$

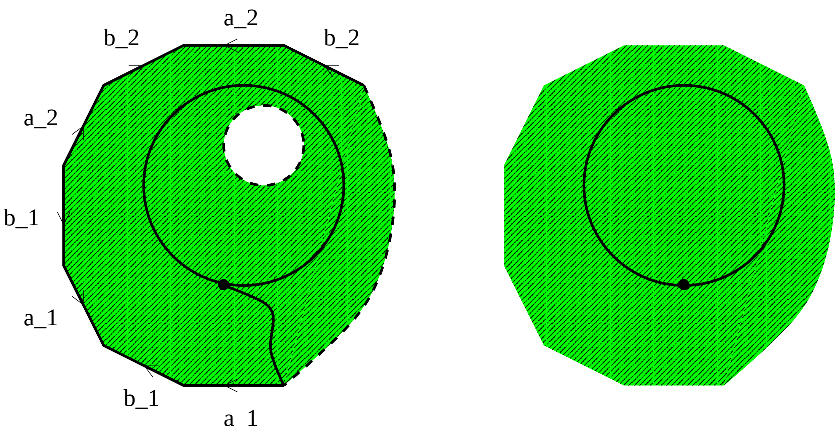
L'aperto U_2 è contraibile, quindi

$$\pi(U_2, x_0) =< \emptyset | \ \emptyset > .$$

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ si retrae su una circonferenza γ passante per x_0, quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) =< \gamma | \ \emptyset > .$$

Vediamo ora di calcolare R_S; γ, in U_1, è omotopicamente equivalente a $\bar{\delta} a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \delta$ e quindi a $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$.
Invece, in U_2, γ è omotopicamente equivalente al cammino banale, e quindi $R_S = \{\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1\}$;



Pertanto si ha che

$$\pi(T_g, x_0) =< \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g | \; \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 >$$

Del tutto analoga (e lasciata come esercizio) è la procedura per calcolare il gruppo fondamentale delle superfici U_h, che porta alla seguente conclusione:

$$\pi(U_h, x_0) =< \alpha_1, \ldots, \alpha_h | \; \alpha_1^2 \ldots \alpha_h^2 = 1 > .$$

Per mostrare che i gruppi fondamentali che abbiamo calcolato non sono tra loro isomorfi, calcoliamo i loro abelianizzati; innanzitutto scriviamo il gruppo fondamentale di U_h con una presentazione diversa: ponendo $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 \ldots \alpha_h$ scriviamo

$$\pi(U_h, x_0) =< \alpha_1, \ldots \alpha_{h-1}, \widetilde{\alpha} | \; \widetilde{\alpha}^2 = 1 >$$

Quindi si ha

$$Ab(\pi(T_g, x_0)) = \mathbb{Z}^{\oplus 2g}$$

$$Ab(\pi(U_h, x_0)) = \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

In particolare, questi gruppi non sono isomorfi, perché non lo sono i loro abelianizzati. $\square$

Parte III

Esercizi e temi d'esame

9

Topologia generale

1) Sia $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea, e sia $A = \{a, b\}$ un insieme formato da due elementi distinti con la topologia banale. Sia infine $Y = \mathbb{R} \times A$ lo spazio prodotto.

a) Si stabilisca se Y è di Hausdorff, se è connesso, se è connesso per archi e se è compatto.
b) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di Y:

$$Z = ((-1, 1) \times \{a\}) \cup ([-2, 2] \times \{b\}),$$

$$W = ((-1, 1) \times \{a\}) \cup ((-2, 2) \times \{b\}).$$

Si stabilisca se Z e W sono compatti.
c) Si costruisca un cammino in Z che congiunga il punto di coordinate $(0, a)$ con il punto di coordinate $(0, b)$.

---

2) Nello spazio $\mathbb{R}^3$, dotato della topologia euclidea, si considerino i sottospazi: $X = \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$, dove $N = (0, 0, 1)$ ed $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 | z = 0\}$.
Sia $Y = X/E$ lo spazio quoziente ottenuto per contrazione di E ad un punto e sia $\pi : X \to Y$ la proiezione sul quoziente.

a) Si provi che π è chiusa, ma non aperta.
b) Y è uno spazio compatto?
c) Y è uno spazio connesso?
d) $Y \setminus \pi(E)$ è uno spazio connesso?.
e) Si determini una relazione di equivalenza $\sim$ su X in modo che lo spazio quoziente $X/\sim$ sia omeomorfo ad $\mathbf{S^2}$.

---

3) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia τ i cui aperti non banali sono gli intervalli $(-a, a) \quad a > 0$. Sia $\mathbf{I}$ l'intervallo $[0, 1]$ dotato della topologia euclidea, e sia $\mathbf{J}$ lo stesso intervallo con la topologia indotta da τ; sia infine $\mathbf{Q} = \mathbf{I} \times \mathbf{J}$ con la topologia prodotto.

a) Si dimostri che $\mathbf{J}$ è compatto.

b) L'applicazione $f : \mathbf{J} \to \mathbf{S}^1$ definita ponendo $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è continua?
c) Sia $g : \mathbf{Q} \to \mathbb{R}$ una funzione continua non costante; si provi che $g(Q)$ è un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
d) Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbf{J}$ che identifica 0 con 1; si descriva la topologia quoziente su $\mathbf{J}/\sim$.

---

4) Si considerino i seguenti spazi topologici

- $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea ε.
- $Y = \mathbb{R}$ con la topologia τ i cui aperti non banali sono le semirette $(-\infty, h)$.
- $Z = \mathbb{R}$ con la topologia η i cui aperti non banali sono le semirette $(k, +\infty)$.

e siano $(X \times Y, \tau' = \varepsilon \times \tau)$ e $(X \times Z, \eta' = \varepsilon \times \eta)$ gli spazi topologici prodotto. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si consideri il sottoinsieme $S = [0,1] \times ((0,2) \cup [3,5])$ con le topologie indotte da τ' e η'

a) (S, τ') è di Hausdorff?
b) $(S.\tau')$ e (S, η') sono compatti?
c) Si provi che (S, τ') è connesso.
d) Si costruisca un cammino in (S, τ') che congiunga i punti $A = (0,1)$ e $B = (1,4)$.

---

5) Si considerino i segenti spazi topologici: $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $Y = \mathbb{R}$ con la topologia τ i cui aperti non banali sono gli intervalli $(-a, a) \quad a > 0$. Sia poi $X \times Y$ lo spazio prodotto.

a) Per ciascuna delle seguenti funzioni su dica se è continua e se è aperta.
$f : X \times Y \to Y$ definita da $f(x,y) = y$,
$g : X \times Y \to X$ definita da $g(x,y) = y$,
$h : X \times Y \to Y$ definita da $h(x,y) = x$,

b) $X \times Y$ è uno spazio di Hausdorff?
c) Si determini un sottospazio di Hausdorff di $X \times Y$.

---

6) Si consideri il seguente sottoinsieme X del piano $\mathbb{R}^2$

$$X = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

dotato della topologia i cui aperti non banali sono i sottoinsiemi della forma $D_a = \{(x,y) \in X|\ x^2 + y^2 < a^2\}$ per $0 < a \leq 1/2$ e i sottoinsiemi della forma $C_b = \{(x,y) \in X|\ x^2 + y^2 > b^2\}$ per $1/2 \leq b < 1$ e le loro unioni.

a) Si stabilisca se X è uno spazio di Hausdorff.
b) Al variare di $h \in (0,1]$ si stabilisca se il sottoinsieme $Y_h = \{(x,y) \in X|\ x^2+y^2 < h^2\}$ è compatto.

c) Si dimostri che $Z = \{(x,y) \in X |\ x^2 + y^2 = (2/3)^2\} \cup \{(x,y) \in X |\ x^2 + y^2 = 1\}$ è connesso (come sottoinsieme di X).

---

7) Sia τ_1 la topologia su $\mathbb{R}$ i cui aperti non banali sono gli intervalli $(-a, a)$ e sia τ la topologia su $\mathbb{R}^2$ prodotto di τ_1 per se stessa; sia infine τ' la topologia su $\mathbb{R}^2$ i cui aperti non banali sono i dischi aperti centrati in $(0, 0)$.

1. Dimostrare che $\tau > \tau'$.
2. Dimostrare che in $(\mathbb{R}^2, \tau')$ ogni sottoinsieme non vuoto è connesso.
3. Stabilire se $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y-3)^2 < 1\} \cup \ \mathrm{P} = (0,4)$ è compatto in $(\mathbb{R}^2, \tau)$ e $(\mathbb{R}^2, \tau')$.

---

8) Sulla retta reale $\mathbb{R}$ si considerino la topologia τ i cui aperti non banali sono gli intervalli $(-a, a)$ con $a > 0$ e la topologia discreta δ; si denoti poi con X lo spazio prodotto $(\mathbb{R}, \tau) \times (\mathbb{R}, \delta)$, e si considerino i seguenti sottospazi di X:

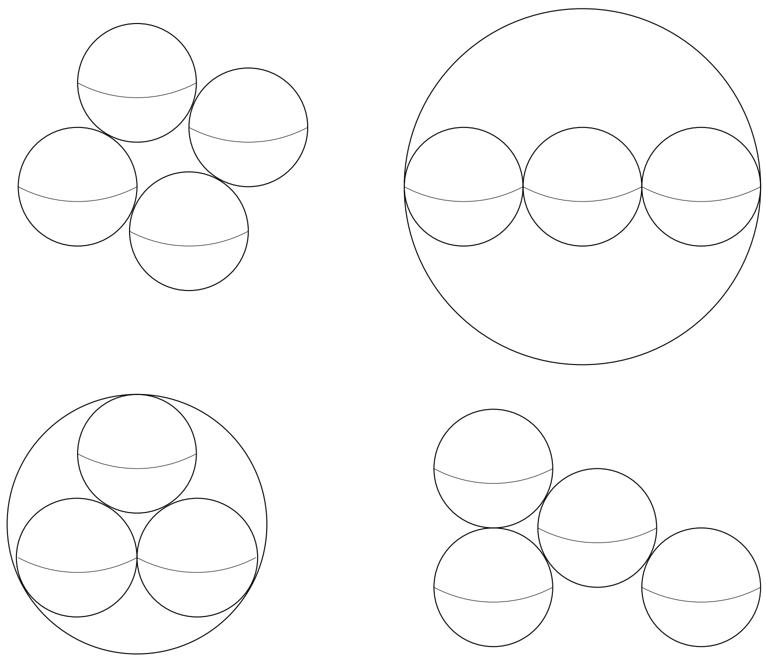
- $A = \{(t,t) \in X \mid -1 \leq t \leq 1\}$
- $B = \{(1,t) \in X \mid -1 \leq t \leq 1\}$
- $C = \{(t,1) \in X \mid -1 \leq t \leq 1\}$

a) Si dimostri che la topologia indotta da X su A è la topologia discreta.
b) Si stabilisca quali tra i sottospazi A, B e C sono compatti.
c) Si stabilisca quali tra i sottospazi A, B e C sono connessi.
d) Siano $f : A \to B$ e $g : C \to A$ le applicazioni definite rispettivamente da $f(t,t) = (1,t)$ e $g(t,1) = (t,t)$. Si stabilisca se f e g sono o meno continue.

10

Topologia algebrica

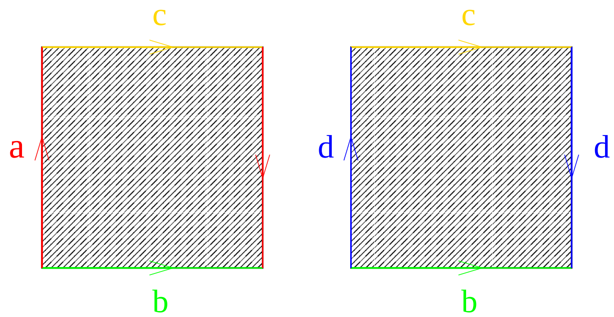
1) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino gli spazi topologici dati da unioni di superfici sferiche come in figura



e li si suddividano in classi di omotopia e di omeomorfismo.

---

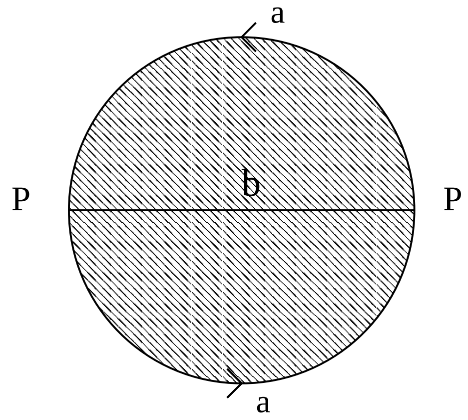
2) Sia X lo spazio ottenuto dai due quadrati in figura per identificazione dei lati con lo stesso nome.



a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.
b) X è una superficie topologica?

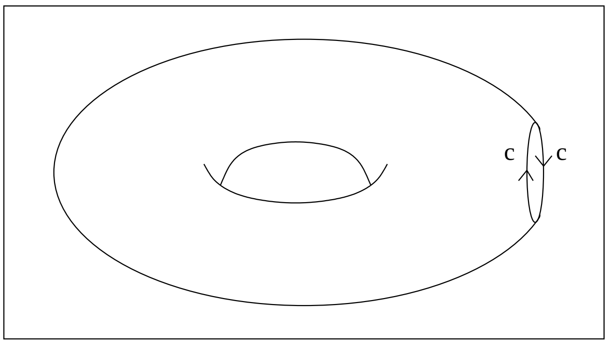
---

3) Sia $X = \mathbb{RP}^2$ il piano proiettivo reale, e sia Z lo spazio topologico ottenuto contraendo ad un punto il sottospazio b mostrato in figura. Si calcoli il gruppo fondamentale di Z.



---

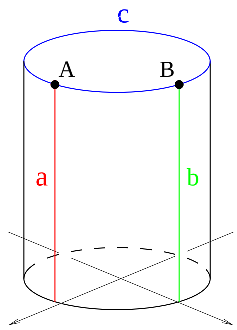
4) Sia T il toro, e X lo spazio ottenuto rimuovendo dal toro un disco aperto e identificando il bordo come in figura.



a) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.
b) Si provi che X è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi.

---

5) Sia X il cilindro $\mathbf{I} \times \mathbf{S}^1$ con la topologia usuale e siano $a = \mathbf{I} \times \{(1,0)\}$, $b = \mathbf{I} \times \{(0,1)\}$, $c = \{1\} \times \mathbf{S}^1$, $A = \{1\} \times \{(1,0)\}$ e $B = \{1\} \times \{(0,1)\}$

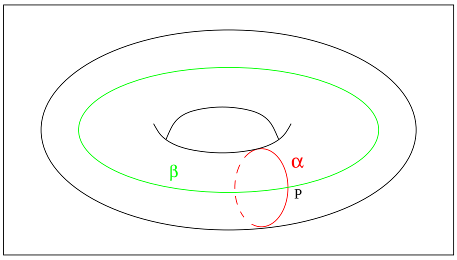


Si calcolino i gruppi fondamentali dei seguenti spazi ottenuti da X per identificazione topologica:

a) X_1 ottenuto identificando a con b in questo modo: per ogni $s \in \mathbf{I}$ si identifica $(s,(1,0))$ con $(s,(0,1))$
b) X_2, ottenuto identificando A con B.
c) X_3, ottenuto identificando a con c in questo modo: per ogni s in $\mathbf{I}$ si identifica $(s,(1,0))$ con $((\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), 1)$.

---

6) Sia T il toro pieno $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$, α e β cammini come in figura e $\mathbf{D}$ il disco piano chiuso il cui bordo è α.

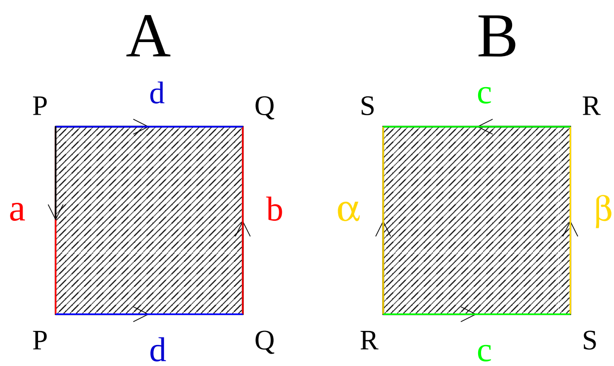


Si stabilisca se i seguenti sottospazi sono retratti e/o retratti di deformazione di T

a) La circonferenza α.
b) La circonferenza β.
c) Il disco $\mathbf{D}$.

---

7) Siano A e B i poligoni in figura



Si calcolino i gruppi fondamentali dei seguenti spazi topologici:

a) X_1, ottenuto contraendo a un punto il sottospazio $a \cup b \cup \alpha \cup \beta$.
b) X_2, ottenuto contraendo a un punto c e identificando punto a punto a con α e b con β.
c) X_3, ottenuto contraendo a un punto d e identificando punto a punto a con α e b con β.

X_1, X_2 e X_3 sono superfici topologiche?

11

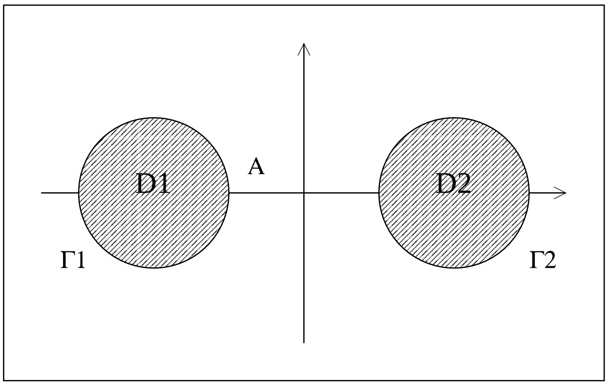
Temi d'esame IV unità

21 novembre 2002

1) Sia $\mathbf{I}$ l'intervallo $[0,1]$ con la topologia euclidea, e sia $\mathbf{J}$ l'intervallo $[0,1]$ con la topologia i cui aperti non banali sono gli intervalli $[0,k)$ con $0 < k \leq 1$. Sia $X = \mathbf{J} \times \mathbf{I}$ con la topologia prodotto.

a) Stabilire se X è di Hausdorff.
b) Fornire un esempio di sottoinsieme infinito di X che sia compatto, ma non chiuso.
c) Dimostrare che $Z = \{0,1\} \times \mathbf{I}$ è connesso per archi.
d) Dimostrare che $W = \mathbf{J} \times \{0,1\}$ non è connesso.

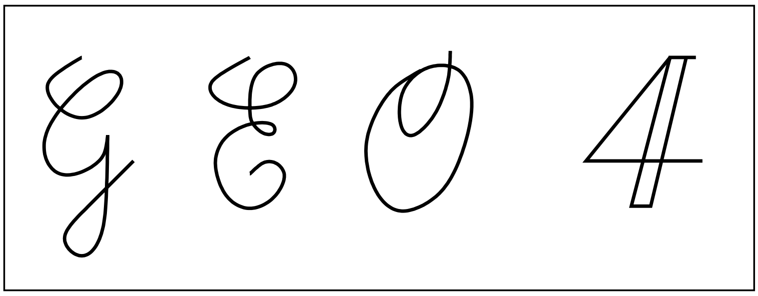
2) Nel piano $\mathbb{R}^2$, dotato della topologia euclidea, si considerino i seguenti sottospazi: $D_1 = \{(x,y) | (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$, $D_2 = \{(x,y) | (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$, $\Gamma_1 = \partial D_1$, $\Gamma_2 = \partial D_2$, $A = (-1,0)$.



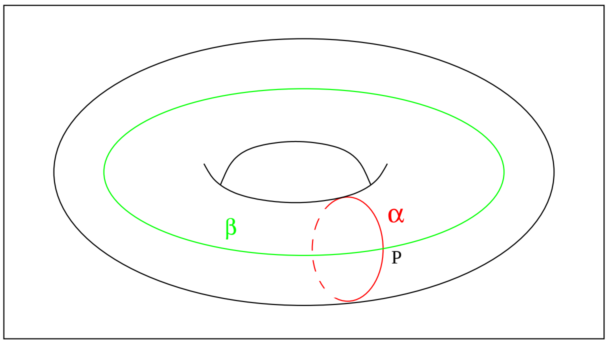
Siano $X = D_1 \cup D_2$, $Y = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e sia $X^* = X/Y$; si denoti con $\pi : X \to X^*$ la proiezione sul quoziente.

a) Si provi che π è chiusa, ma non aperta.
b) Si stabilisca se X^* è compatto, connesso, di Hausdorff.
c) $X^* \backslash \pi(A)$ è connesso?
d) $\pi(\overset{\circ}{D}_2 \cup A)$ è compatto?

3) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$, con la topologia indotta da quella euclidea, e li si suddividano in classi di omeomorfismo e di equivalenza omotopica.



4) Sia T il toro, e α e β cammini sul toro come in figura.



Sia X lo spazio topologico ottenuto contraendo a un punto α, sia Y lo spazio topologico ottenuto contraendo ad un punto β e sia Z lo spazio topologico ottenuto contraendo ad un punto $\alpha \cup \beta$.

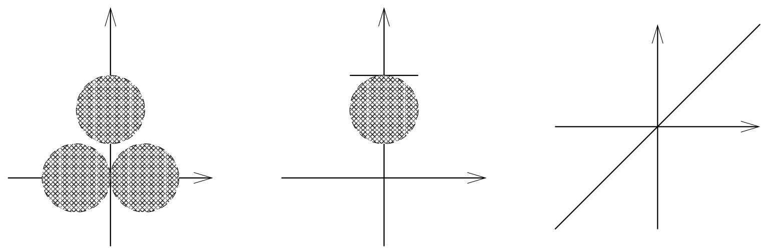
a) Si calcolino i gruppi fondamentali di X di Y e di Z rispetto al punto immagine del punto P tramite le proiezioni sui quozienti.
b) X, Y e Z hanno lo stesso tipo di omotopia? Sono omeomorfi?

6 febbraio 2003

1) Sia X la retta reale con la topologia euclidea, e sia Y la retta reale con la topologia i cui aperti non banali sono gli intervalli $(-a,a)$ con $a>0$ e sia $Z=X\times Y$ con la topologia prodotto. In Z si considerino i seguenti sottospazi con la topologia indotta:

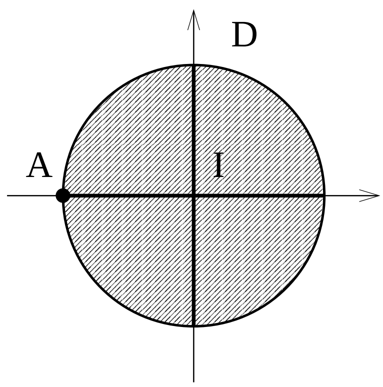
$$\begin{gathered} D_1=\{(x,y)\in Z \mid (x+1)^2+y^2<1\} \\ D_2=\{(x,y)\in Z \mid x^2+(y-2)^2<1\} \\ D_3=\{(x,y)\in Z \mid (x-1)^2+y^2<1\} \\ I=[0,1]\times\{3\} \\ \Delta=\{(x,y)\in Z \mid y=x\}. \end{gathered}$$

a) Si stabilisca se qualcuno dei sottospazi $U_1=D_1\cup D_2$, $U_2=D_1\cup D_3$, $U_3=D_2\cup D_3$ è connesso.
b) Il sottospazio D_2 è compatto? Il sottospazio $D_2\cup I$ è compatto?
c) Il sottospazio Δ è chiuso? Quale topologia è indotta su Δ dalla topologia di Z?



2) Nel piano $\mathbb{R}^2$, dotato della topologia euclidea, si considerino i sottospazi

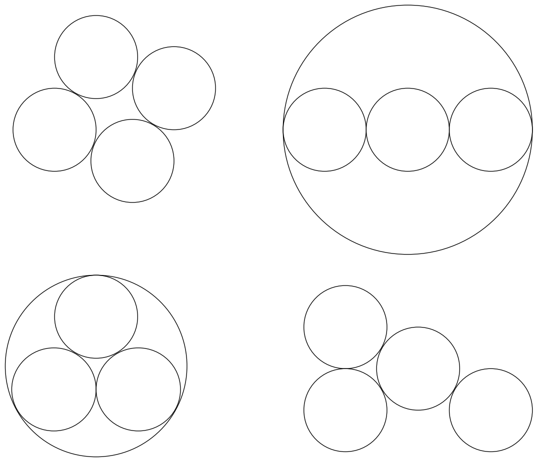
$$\begin{gathered} D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\} \\ I=(\{0\}\times[-1,1])\cup([-1,1]\times\{0\}) \\ A=(-1,0) \end{gathered}$$



Sia $D^*=D/I$; si denoti con $\pi: D\to D^*$ la proiezione sul quoziente.

a) Si provi che π è chiusa, ma non aperta.
b) Si stabilisca se D^* è uno spazio di Hausdorff.
c) $D^*\backslash\pi(A)$ è connesso?
d) Si determini un sottospazio $E\subset D$ tale che $D/(I\cup E)$ sia omeomorfo all'unione a un punto di quattro sfere.

3) Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ si considerino gli spazi topologici dati da unioni di circonferenze come in figura



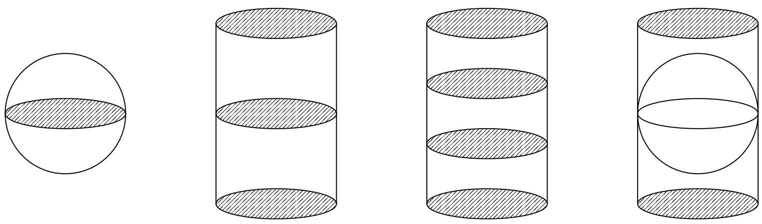
e li si suddividano in classi di omotopia e di omeomorfismo.

4) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ e nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ si condiderino i seguenti sottospazi:

$$\mathbf{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$
$$\mathbf{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$
$$\Gamma = [-3/2, 3/2] \times \partial\mathbf{D}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

Si calcolino i gruppi fondamentali dei seguenti spazi topologici:

1. $X_1 = \mathbf{S}^2 \cup (\mathbf{D}^2 \times \{0\})$.
2. $X_2 = \Gamma \cup (\mathbf{D}^2 \times \{-3/2, 0, 3/2\})$.
3. $X_3 = \Gamma \cup (\mathbf{D}^2 \times \{-3/2, -1/2, 1/2, 3/2\})$.
4. $X_4 = \Gamma \cup (\mathbf{D}^2 \times \{-3/2, 3/2\}) \cup \mathbf{S}^2$.



Si suddividano inoltre tali spazi topologici in classi di omotopia.

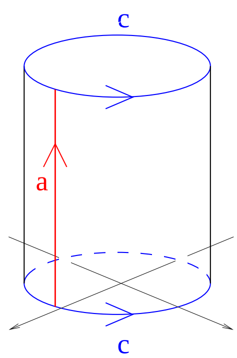
14 aprile 2003

1) Sia X l'intervallo $[-1, 1]$ con la topologia τ così definita: U è aperto non banale di X se e solo se U non contiene il punto $\{0\}$ oppure U contiene l'intervallo $(-1, 1)$.

a) (X, τ) è uno spazio di Hausdorff?
b) (X, τ) è uno spazio connesso?
c) (X, τ) è uno spazio di compatto?
d) Il sottospazio $X \backslash \{0\}$ con la topologia indotta da τ è compatto?

2) Sia (X, τ) uno spazio topologico, e sia $(X \times X, \tau \times \tau)$ lo spazio prodotto.
Si provi che (X, τ) è di Hausdorff se e solo se il sottospazio $\Delta \subset X \times X$ definito in questo modo $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiuso.
Sia poi $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea; si forniscano un esempio di un sottospazio $Y \subset \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Y$ sia di Hausdorff e un esempio di un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Z$ non sia di Hausdorff.

3) Sia X il cilindro $\mathbf{I} \times \mathbf{S}^1$ con la topologia usuale e si consideri Z, lo spazio quoziente di X ottenuto identificando le due circonferenze identicate con c e contraendo il segmento a ad un punto.



Si calcoli il gruppo fondamentale di Z.

4) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ siano O il punto $(0, 0, 0)$, r la retta $x = y = 0$ e Γ la circonferenza $x^2 + y^2 - 1 = 0 = z$. Si considerino poi i seguenti sottospazi:

1. $X_1 = \mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$.
2. $X_2 = \mathbb{R}^3 \backslash \{r\}$.
3. $X_3 = \mathbb{R}^3 \backslash \{r \cup \Gamma\}$.

e li si suddividano in classi di omotopia e di omeomorfismo.
(Suggerimento: può essere utile trovare dei retratti di deformazione degli spazi X_i).

23 giugno 2003

1) Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $Y = \{*\}$ un insieme con un solo elemento e sia $X^* = \mathbb{R} \cup Y$.
Si consideri la famiglia τ di sottoinsiemi di X^* così definita: $U \subset X^* \in \tau$ se

a) U non contiene $*$ e U è un aperto della topologia euclidea.
b) U contiene $*$ e U^c è compatto in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

Si verifichi che τ è una topologia per X^* e si stabilisca se X^* è compatto, connesso, di Hausdorff.

2) Si consideri lo spazio topologico $X = \mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_c$, dove $\mathbb{R}_\varepsilon$ è $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e $\mathbb{R}_c$ è $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita e sia $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.
Si determinino $\mathring{Q}$ e $\overline{Q}$; si dica inoltre se Q è compatto in X e se Q, con la topologia indotta da X è uno spazio topologico di Hausdorff.

3) Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$ e siano $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (0, 1, 0)$.
Sia Σ una circonferenza, e siano P, Q due suoi punti distinti.
Sia X lo spazio topologico ottenuto identificando A con P e B con Q, e sia Y lo spazio topologico ottenuto identificando A con P e C con Q.
X e Y sono omeomorfi? Hanno lo stesso tipo di omotopia?

4) Sia $X = \mathbb{RP}^2 \setminus \{P, Q\}$ il piano proiettivo reale privato di due punti. Si calcoli il gruppo fondamentale di X e si mostri che esso è un gruppo libero.

14 luglio 2003

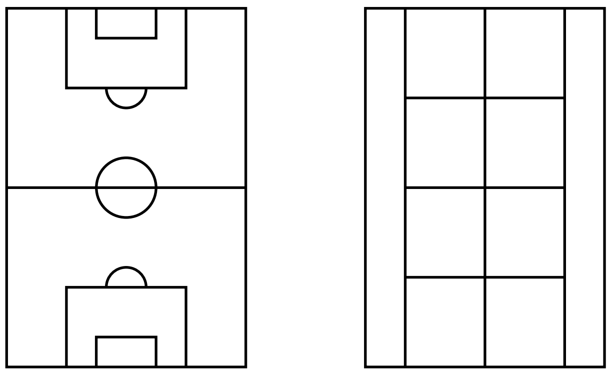
1) Sulla retta reale $\mathbb{R}$ si consideri la famiglia τ di sottoinseimi così definita: un sottoinsieme $U \in \tau$ se e solo se U^c è compatto nella topologia euclidea.
Si verifichi che τ è una topologia e la si confronti, se possibile, con quella euclidea.
Si stabilisca poi se lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto, connesso, di Hausdorff.

2) Si considerino su $\mathbb{R}$ le seguenti topologie:

a) $\tau_1 =$ Topologia euclidea.
b) $\tau_2 =$ Topologia i cui aperti non banali sono gli intervalli $(-a, a)$ con $a \in \mathbb{R}_+$.
c) $\tau_3 =$ Topologia i cui aperti non banali sono le semirette $(-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}_+$.

e sia $X_i = (\mathbb{R}, \tau_i)$. Si considerino le applicazioni $f_i : X_i \to [0, +\infty)$ definite ponendo $f_i(x) = |x|$ e si denoti con σ_i la topologia quoziente su $[0, +\infty)$ relativa all'applicazione f_i e con Y_i lo spazio topologico $([0, +\infty), \sigma_i)$.
Si stabilisca se gli spazi Y_i sono di Hausdorff e se sono compatti.

3) Si considerino i seguenti sottospazi del piano euclideo con la topologia indotta da quella euclidea, e si stabilisca se sono omeomorfi e/o omotopicamente equivalenti.



4) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino il toro T ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza del piano (y, z) di centro $(2, 0)$ e raggio 1 e il piano π di equazione $y = 2$. Sia X l'unione di T e π. Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

17 settembre 2003

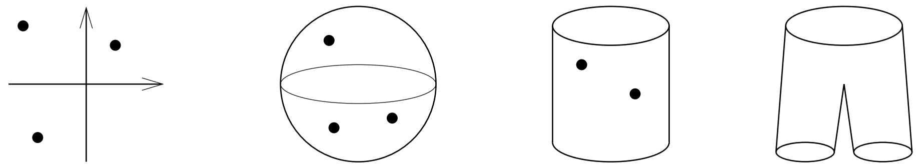
1) Sia $X = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, con la topologia indotta dall'identificazione $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ che fa corrispondere alla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ il vettore (a, b, c, d). Siano poi $Y \subset X$ l'insieme delle matrici invertibili: $Y = \{A \in X \mid \det A \neq 0\}$ e $Z \subset X$ l'insieme delle matrici ortogonali: $Z = \{A \in X \mid AA^t = I\}$. Si provi che Y è aperto e che Z è compatto. (Suggerimento: può essere utile considerare l'applicazione (continua?) determinante $\det : X \to \mathbb{R}$).

2) Sia X l'insieme $[0, 1] \cup \{2\}$ con la topologia i cui aperti non banali sono gli aperti euclidei di $[0, 1]$ e gli insiemi della forma $(a, 1) \cup \{2\}$ con $a \in [0, 1)$.
Si consideri l'applicazione $f : [-1, 1] \to X$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Si stabilisca se tale applicazione è continua quando $[-1, 1]$ ha rispettivamente la topologia grossolana, la topologia cofinita, la topologia euclidea o la topologia discreta. Si stabilisca poi se lo spazio topologico X è o meno di Hausdorff, compatto, connesso.

3) Si suddividano i seguenti spazi topologici in classi di equivalenza omotopica e se ne calcoli il gruppo fondamentale:



$\mathbb{R}^2 \setminus \{3 \text{ pti}\}$ $\quad$ $\mathbf{S}^2 \setminus \{3 \text{ pti}\}$ $\quad$ $(\mathbf{I} \times \mathbf{S}^1) \setminus \{2 \text{ pti}\}$ $\quad$ I "calzoni.

4) Sia X lo spazio topologico ottenuto facendo la somma connessa di due tori e togliendo un punto. Si calcoli il gruppo fondamentale di X.
(Suggerimento: si consideri un modello piano di X).