SPAZI VETTORIALI, BASI, APPLICAZIONI LINEARI

1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Allora

   (a) $\forall v \in V\ \exists!\ u \in V$ tale che $v + u = v$. Indichiamo tale elemento con O_v.

   (b) $\forall v \in V\ \exists!\ \overline{v}$ tale che $v + \overline{v} = O_v$. Indichiamo tale opposto rispetto all'operazione $+$ con $-v$.

   (c) $\forall v \in V$, $\forall k \in K$ si ha $kv = O_v \Leftrightarrow k = 0$ o $v = O_v$.

   (d) $\forall v \in V\ (-1)v = -v$.

2. **Teorema 1.** *Siano V uno spazio vettoriale su K e $W \subseteq V$. Allora W è sottospazio $\Leftrightarrow W \neq \emptyset$ e*

   (a) $\forall v, w \in W$, $v + w \in W$,

   (b) $\forall v \in W$, $\forall k \in K$, $kv \in W$.

3. $< v_1, ..., v_n >= \{k_1 v_1 + ... + k_n v_n : k_i \in K, i = 1, 2, ...n\}$

4. (a) $\forall v \in V$, $v = O_v \Leftrightarrow v$ l.d.

   (b) Se i vettori $v_1, ..., v_n$ generano uno spazio vettoriale V allora se $w \in V$ si ha w l.d. e $V =< w, v_1, ..., v_n >$.

   (c) Sia V di dimensione finita n. Allora ogni insieme di $n + 1$ vettori è l.d. e ogni insieme di n vettori l.i. è una base.

5. **Teorema 2.** *Sia V uno spazio vettoriale su k finitamente generato, $V \neq \emptyset$ e siano $\{v_1, ..., v_n\}$, $\{w_1, ..., w_m\}$ due basi di V. Allora $m = n$.*

6. Ogni vettore di $U \bigoplus W$ si esprime in modo unico nella forma $u + v$ con $u \in U$ e $v \in W$.

7. **Formula di Grassmann.**

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$$

8. **Teorema 3.** *(Nullità + rango) Siano V, W s.v. su un campo K, f lineare di V in W. Se V è finitamente generato allora $Kerf$ e Imf sono f.g. e*

$$dimKerf + dimImf = dimV$$

9. Siano U, V, W s.v. su K, $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineari. Allora $g \circ f$ è lineare.

10. Se $f : U \to V$ è un isomorfismo, allora $f^{-1} : V \to U$ è un isomorfismo.

11. $Hom(V, W)$ è uno spazio vettoriale.

MATRICI E OPERATORI LINEARI, AUTOVALORI E AUTOVETTORI

1. Siano K un campo, V e V' s.v. su K, $B = \{v_1, ..., v_n\}$, $B'\{w_1, ..., w_m\}$ basi di V e V' rispettivamente. Allora provare che $f^B_{B'}$ è un isomorfismo, $M^B_{B'}$ è un isomorfismo, $f^B_{B'} \circ M^B_{B'} = Id$ e $M^B_{B'} \circ f^B_{B'} = Id$.

1. Siano V e V' s.v. di dimensione n su K, $B = \{v_1, ..., v_n\}$, $B'\{w_1, ..., w_n\}$ basi di V e V' rispettivamente. Allora mostrare che:

   (i) $\forall f \in Hom(V, V')$, f è un isomorfismo $\Leftrightarrow M^B_{B'}$ è invertibile.

   (ii) A è invertibile $\Leftrightarrow f^B_{B'}$ è un isomorfismo.

2. La relazione di similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza.

3. Un operatore lineare f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ una base di autovettori.

4. Se λ è un autovalore, l'autospazio V_λ è un sottospazio di V.

5. Se λ non è un autovalore $V_\lambda = \{O_V\}$.

6. Se $\lambda, \mu \in K$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow V_\lambda \cap V_\mu = \{O_V\}$

7. Ad ogni autovettore corrisponde un unico autovalore.

8. 0 è autovalore $\Leftrightarrow f$ non è iniettiva.

ESERCIZI 1

1. Siano K un campo, X un insieme non vuoto, V l'insieme delle funzioni di X in K con le operazioni di somma e prodotto definite rispettivamente $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(kf)(x) = kf(x)$ $\forall k \in K$ e $\forall v \in V$. Dimostrare che V è uno s.v. su K.

2. Sia V lo spazio delle matrici quadrate su K. Allora:

   (a) $W = \{A : A = A^t\}$ è un sottospazio.

   (b) $W = \{A : A^2 = A\}$ è un sottospazio.

3. Dimostrare che $U + W =< U \cup W >$ e se $U =< u_1, ..., u_n >$, $W =< w_1, ..., w_m >$ allora $U =< u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m >$ generano $U + W$.

4. Determinare se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono l.d.:

   (i) $(1, -2, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(7, -4, 1)$;

   (ii) $(1, -3, 7)$, $(2, 0, -6)$, $(3, 1, 1,)$, $(2, 4, -5)$;

   (iii) $(1, 2, -3)$, $(1, -3, 2)$, $(2, -1, 5)$;

   (iv) $(2, -3, 7)$, (0,0,0), $(3, -1, -4)$.

5. Determinare se le seguenti sono basi di $\mathbb{R}^3$:

   (i) $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 5)$;

   (ii) $(1, 2, 3)$, $(1, 0, -1)$, $(3, -1, 0)$, $(2, 1, 2)$;

   (iii) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$;

   (iv) $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$, (5,3,4).

6. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$(1,-2,5,-3),(2,3,1,-4),(3,8,-3,-5)$$

   Trovare una base di W ed estenderla ad una di tutto lo spazio.

7. Trovare la dimensione dello spazio generato da:

   (i) $(1,-2,3,-1)$ e $(1,1,-2,3)$;

   (ii) $(3,-6,3,-9)$ e $(-2,4,-2,6)$;

   (iii) t^3+2t^2+3t+1 e $2t^3+4t^2+6t+2$.

8. Stabilire quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

   (a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ t.c. $f(x,y)=(x+y,x)$;

   (b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ t.c. $f(x,y)=(x+1,2y,x+y)$;

   (c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ t.c. $f(x,y)=xy$.

9. Siano $f:V\to U$ lineare e $v_1,...,v_n$ t.c. $f(v_1),...,f(v_n)$ sono linearmente indipendenti. Dimostrare che $v_1,...,v_n$ sono l.i..

10. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ t.c. $f(3,1)=(2,-4)$e $f(1,1)=(0,2)$. Trovare $f(a,b)$ e calcolare $f(7,4)$.

11. Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ t.c. $f(x,y,z)=(2x,4x-y,2x+3y-z)$. Dimostrare che è invertibile e calcolare f^{-1}.

12. Siano $f:V\to U$, $g:U\to W$ lineari. Dimostrare che

$$dim((g\circ f)(V))\leq dim(g(U)) \quad e \quad dim((g\circ f)(V))\leq dim(f(V)).$$

ESERCIZI 2

1. Siano $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ e $B' = \{(1,1),(0,1)\}$ basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente. Calcolare $f_{B'}^{B}(A)$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Sia $B = \{(1,3),(2,5)\}$ base di $\mathbb{R}^2$, $f(x) = (3x - 4y, x + 5y)$, trovare la matrice associata ad f.

3. Sia B la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, trovare le matrici di cambiamento di base e verificare che sono l'una l'inversa dell'altra.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. Trovare la matrice associata all'operatore $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(v) = Av$ rispetto alle basi $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $B' = \{(1,3),(2,5)\}$.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

   (i) Trovare gli autovalori e gli autovettori corrispondenti.

   (ii) Trovare $P \in GL(2,\mathbb{R})$ t.c. $P^{-1}AP$ è diagonale.

6. Trovare gli autovalori e la base di ogni autospazio di $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $f(x,y,z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

7. Siano $A, B \in M_{n,n}(K)$. Dimostrare che AB e BA hanno gli stessi autovalori.

8. Sia $T \in Hom(V,V)$ invertibile e λ un suo autovalore. Dimostrare che λ^{-1} è autovalore per T^{-1}.

9. Dimostrare che una matrice A e la sua trasposta A^t hanno lo stesso polinomio caratteristico.

10. Per ciascuno dei seguenti operatori si trovino gli autovalori e una base per ogni autospazio. Dedurne se f è diagonalizzabile o meno.

    (i) f(x,y)=(3x+3y,x+5y)

    (ii) f(x,y,z)=(x+y+z,2y+z,2y+3z)

    (iii) f(x,y,z)=(x+y,y+z,-2y-z)

ESERCIZI 3

1. In $\mathbb{E}^2$ con il riferimento cartesiano standard si consideri, $\forall k \in \mathbb{R}$, l'insieme γ_k dei punti che soddisfano

$$(k-1)x_1^2 + 2kx_1x_2 + kx_2^2 - 2x_1 + k = 0$$

   (a) Per quali valori di k γ_k è una conica a centro non degenere? In tali casi si determini il centro della conica.

   (b) Per quali valori di k γ_k è una circonferenza?

2. In $\mathbb{E}^2$ si fissi un riferimento cartesiano. Si noti che, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, gli insiemi dei punti r_λ ed s_λ t.c.

$$r_\lambda : \lambda^2 x + (\lambda - 1)y + 1 = 0$$

   e

$$s_\lambda : (\lambda + 1)x + y - 1 = 0$$

   sono due rette. Si provi che sono incidenti per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e si dimostri che al variare di λ l'intersezione è una parabola.

3. Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme dei punti di $\mathbb{E}^2$ tali che

$$(1-\lambda)x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + (2-\lambda)x_2^2 + 2x_1 + 5 = 0$$

   è un' ellisse non degenere? Fissare un valore di λ e trovare la forma canonica della conica.

4. In $\mathbb{E}^2$ rispetto al riferimento cartesiano standard si consideri, $\forall s \in \mathbb{R}$, i punti $A(s) = (2s - 1, s)$ e $B(s) = (2s - a, s^2)$.

   Siano poi $A = \{A(s) : s \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{B(s) : s \in \mathbb{R}\}$, si provi che A è una retta e B una parabola del piano. Se $\forall s \in \mathbb{R}$ $C(s)$ è il punto medio di $A(s)$ e $B(s)$, si provi che $C(s)$ è una conica e si stabilisca quando è una parabola non degenere, un'iperbole doppiamente degenere e un'iperbole non degenere.

5. Rispetto al riferimento cartesiano standard si consideri, in $\mathbb{E}^3$ la sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e un piano $p : ax + by + cz = d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

   (a) Si provi che $S \cap p$ è un'ellisse sul piano p;

   (b) Per quali a, b, d passa per l'origine?

6. In $\mathbb{E}^2$ standard si consideri

$$\Gamma_k : (k - 8)x^2 + ky^2 - 6xy + 2kx = 0$$

   (a) per quali valori reali di k Γ_k è una conica degenere? In tali casi si determini le rette in cui degenera la conica.

   (b) Per quali valori reali di k Γ_k è una parabola non degenere? Si trovi la forma canonica.