Probabilità discreta

Consideriamo un sistema di n particelle indistinguibili; dividiamo queste particelle in s regioni, in modo che ognuna delle particelle cada in una e una sola regione. Lo stato del sistema è descritto dal numero delle particelle in ognuna delle regioni, quindi è definito univocamente dal vettore $(n_1, \dots, n_s)$, dove n_k è il numero di particelle nella regione k, $k = 1, \dots, s$.

Definiamo su questo sistema la *statistica di Bose-Einstein*, ossia definiamo gli eventi elementari come tutte le configurazioni distinte di particelle, ad ognuna delle quali assegnamo la stessa probabilità.

Esercizio 1
Trovare il numero di configurazioni (equiprobabili) di n particelle divise in s regioni, soggette alla statistica di Bose-Einstein.

Definiamo su un sistema di n particelle e s regioni la *statistica di Fermi-Dirac*, in cui si assume che

non più di una particella può occupare una regione

e tutte le configurazioni possibili sono equiprobabili.

Particelle atomiche, come ad esempio gli elettroni, sono soggette alla statistica di Fermi-Dirac; i fotoni, al contrario, sono soggetti alla statistica di Bose-Einstein.

Esercizio 2
Trovare il numero di configurazioni (equiprobabili) di n particelle divise in s regioni, soggette alla statistica di Fermi-Dirac.

Esercizio 3
Nel caso di particelle distinguibili, si ricade negli esempi classici; si parla allora di *statistica di Maxwell-Boltzmann.* Siano date n particelle distinte (le pensiamo numerate da 1 a n) che devono essere divise in s celle; quante sono le disposizioni distinte?

Esercizio 4
Siano date n particelle indistinguibili divise in s regioni, soggette alla statistica di Bose-Einstein.

Indichiamo con q_k la probabilità che in una regione fissata (per chiarire le idee, pensiamo alla regione definita dal numero 1) vi siano esattamente k particelle.

(1) Dimostrare che $q_k = \dfrac{\binom{s+n-k-2}{n-k}}{\binom{s+n-1}{n}}$.

(2) Dimostrare che $q_0 > q_1 > q_2 > \dots$

Esercizio 5
In quanti modi si possono dividere 6 persone in coppie? Generalizzare al caso di $2n$ persone.

Esercizio 6
Due numeri vengono scelti a caso dall'insieme dei numeri $\{1, 2, \dots, n\}$. Qual è la probabilità che uno di essi sia minore di k e l'altro sia maggiore di k, fissato per un intero k fissato: $1 < k < n$?

Esercizio 7
Dimostrare le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali:

(1) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (formula di Stifel)

(2) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Esercizio 8

Dati due eventi A e B, con probabilità $\mathbb{P}(A) = 0,7$ e $\mathbb{P}(B) = 0,6$, si chiede di dare una stima inferiore e una stima superiore al numero $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Esercizio 9

Quante sono le parole (anche non di senso compiuto) che si possono creare anagrammando la parola "MATEMATICA"?

Esercizio 10

Un'urna contiene N palline nere e V palline verdi.

(1) Calcolare la probabilità che nella prima estrazione esca una pallina nera.
(2) Consideriamo i seguenti sviluppi.
   (a) La pallina viene reimmessa nell'urna e si procede ad una seconda estrazione. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia nera?
   (b) Si procede ad una seconda estrazione senza reimmissione. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia nera?
   (c) La pallina viene reimmessa nell'urna insieme ad altre B dello stesso colore. Si procede ad una seconda estrazione: qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia nera?
(3) Nei tre casi discussi in precedenza, calcolare la probabilità che la seconda pallina estratta sia nera, sapendo che la prima pallina estratta era nera.
(4) Ancora nei tre casi discussi in precedenza, calcolare la probabilità che la prima pallina estratta fosse nera, sapendo che la seconda pallina estratta è nera.

Esercizio 11

Una fabbrica possiede 3 linee di produzione, la linea L, la linea M e la linea V; dalla prima linea esce il 20% della produzione, dalla linea M ne esce il 30% e dalla linea V ne esce il rimanente 50%. L'1% degli oggetti prodotti dalla linea L sono difettosi, mentre le linee M e V producono oggetti difettosi con probabilità rispettivamente del 2% e 5%.

Calcolare la probabilità che un oggetto non difettoso provenga dalla linea L.

Esercizio 12

Siete stati invitati a partecipare ad una campagna di screening contro una malattia, di cui si sa è colpito lo $0,4\%$ della popolazione. Sapete che il test ha una percentuale elevata di precisione: eseguito su una persona sana fornisce risultato negativo nel 99% dei casi, eseguito su una persona malata, l'esito è positivo nel 99% dei casi.

Purtroppo, l'esito del vostro test è positivo. Qual è la probabilità che siate in effetti malati? E se eseguite un secondo test, anche questo con risultato positivo, a quanto sale questa probabilità?

Probabilità discreta

Esercizio 1
Supponete di dover affrontare un avversario con cui avete una probabilità p di vincere un incontro, indipendentemente dagli altri incontri.

a.: È più probabile vincere 3 partite su 4, oppure 5 partite su 8? Quanto vale la probabilità di vincere $n+1$ partite su $2n$?

b.: È più probabile vincere almeno 3 partite su 4, oppure almeno 5 partite su 8? Quanto vale la probabilità di vincere almeno $n+1$ partite su $2n$? (si affronti almeno il caso $p = 1/2$)

Esercizio 2
Un paradosso dell'infinito. Supponete di disporre di una quantità illimitata di soldi; lanciando una moneta, scommettete contro un amico 1 Euro che esce testa al primo lancio. Se ciò non accade, scommettete 2 Euro che succeda al secondo lancio e, in generale, scommettete 2^n Euro che esca testa al lancio $n+1$, se non è mai uscita nei primi n lanci.

Definiamo V la somma vinta al termine del gioco: calcolare V in funzione di p e dimostrare che per una moneta equilibrata V non ha media finita.

L'apparente paradosso cade se osserviamo che V non è la giusta variabile aleatoria da utilizzare per descrivere il gioco. Indichiamo con G il guadagno totale al termine del gioco, dato da V meno la somma persa fino a quel momento. Dimostrare allora che $G = 1$ per ogni valore di $p > 0$.

Esercizio 3
Sia N il lancio a cui esce per la prima volta testa; allora N ha distribuzione geometrica. Calcolare la media di N. Qual è il valore più probabile assunto da N?

Esercizio 4
Un altro paradosso dell'infinito. Data una moneta, di parametro p, si fissi una qualsiasi successione $(x_1, \dots, x_k)$ di uscite, per $k \geq 1$ fissato. Supponiamo per semplicità che n siano le teste e $k-n$ le croci.

Allora, lanciando una moneta e registrando la successione dei risultati, si ha con probabilità 1 che a partire da un certo istante viene riprodotta la successione fissata.

Osservazione. Questo problema viene spesso presentato in casi particolari: ad esempio, la probabilità di ottenere una successione comunque lunga di teste consecutive è uno. Il problema è che il tempo di attesa di questo evento può essere mooolto lungo.

Esercizio 5
Consideriamo il seguente gioco: lancio una moneta e scommetto sul numero N in cui, per la prima volta, sono uscite due teste consecutive.

(1) Calcolare esplicitamente i valori di $\mathbb{P}(N = n)$ per $n = 2, 3, 4$.
(2) Scrivere una equazione alle differenze per $\phi(n) = \mathbb{P}(N = n)$.
(3) Dimostrare che $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$.
(4) Calcolare la media di N.
(5) Risolvere l'equazione alle differenze $\phi(n+2) = q\phi(n+1) + qp\phi(n-2)$ e ricavare la distribuzione di N.

Esercizio 1
Lanciamo una moneta (sia p la probabilità di ottenere testa) finché non esca testa per la prima volta. Sia W il numero di lanci necessari.

(1) Si determinino la distribuzione e la media di W.
Si lanci ora la stessa moneta per lo stesso numero W di volte; sia Z il numero di teste uscite.
(2) Si determinino la distribuzione e la media di Z condizionata all'evento $W = 3$.
(3) Si determini la probabilità di $(Z > 1)$.
(4) Si determinino la distribuzione e la media di Z.

Esercizio 2
Consideriamo una passeggiata casuale simmetrica i cui vertici siano $S_0 = 0, S_1, \ldots, S_n$. Calcolare la probabilità $\mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \ldots, S_{2n} = 2x)$.

Esercizio 3
Dopo aver lanciato un dado a sei facce, effettuiamo un numero di lanci di una moneta non truccata pari al risultato del tiro del dado. Qual è la probabilità di non ottenere mai testa?

Esercizio 4
Lanciamo una moneta (sia p la probabilità di ottenere testa) un numero N (fissato) di volte. Se esce testa, immetto in un'urna una pallina Turchese, se esce croce immetto nell'urna una pallina Celeste.

(1) Determinare la distribuzione di probabilità e la media del numero X di palline T nell'urna.
(2) Si estraggono due palline, senza reimmissione, nell'urna. Determinare la distribuzione di probabilità di X condizionato a questo evento.

Legge di una variabile aleatoria: una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$. Si dice anche funzione di ripartizione di X. *Densità di una variabile aleatoria:* una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva, boreliana, tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1,$$

per cui

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = F(t).$$

Esercizio 1
Sia X una variabile aleatoria con densità $f(x) = cxe^{-x^2/\theta}$, dove $\theta > 0$ è un parametro positivo.

(1) Determinare c in modo che $f(x)$ sia una densità di probabilità.
(2) Determinare la distribuzione di $Y = X^2$.
(3) Determinare la distribuzione di $W = e^{-X^2/\theta}$.

Distribuzione uniforme: sia C un boreliano di $\mathbb{R}$ (pensiamo ad esempio $C = [a, b]$) e consideriamo la densità $f(x) = \frac{1}{c}\mathbf{1}_C(x)$, dove $c = |C|$ è la misura di C secondo la misura di Lebesgue.

Esercizio 2
Consideriamo una variabile aleatoria U con distribuzione uniforme in $(0, 1)$ e sia $X = -\log(U)$. Determinare la distribuzione di X.

Speranza: una variabile aleatoria continua ammette media se $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\, dx < \infty$ e in tal caso diremo media di una variabile aleatoria continua il numero $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$.

Esercizio 3
La media di una distribuzione esponenziale $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ è pari a $1/\lambda$.

Esercizio 4
Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ. Allora

(1) $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ e $\mathbb{P}(X > x) \neq 0$ per ogni $x > 0$;
(2) posto $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}(\cdot \mid \{X > x\})$ la misura di probabilità ottenuta da $\mathbb{P}$ condizionando rispetto all'evento $\{X > x\}$, la legge di $X - x$ secondo $\mathbb{P}_x$ coincide con la legge di X secondo $\mathbb{P}$.

Vale anche il viceversa: una variabile aleatoria che verifica (1) e (2) ha necessariamente legge esponenziale.

Indipendenza: due variabili aleatorie X e Y si dicono indipendenti se per ogni scelta di I e J boreliani reali, gli eventi $\{X \in I\}$ e $\{Y \in J\}$ sono tra loro indipendenti.

Esercizio 5
Sia posto in funzione uno strumento formato da due elementi in serie (il sistema funziona se entrambi funzionano), aventi tempo di vita esponenziale di parametro λ. Determinare la probabilità che lo strumento sia ancora in funzione al tempo t.

Esercizio 6
Lo stesso del precedente, ma con due elementi in parallelo (il sistema funziona se almeno uno funziona).

Esercizio 7
Sia (X, Y) un punto scelto a caso nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Siano

$$T = \frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}, \qquad U = \max(X, Y).$$

Determinare la distribuzione di T e U.

Esercizio 1
Sia $Z = (X, Y)$ una v.a. bidimensionale con distribuzione uniforme in $B(0, 1)$. Trovare $\mathbb{E}(X)$, $E(Y)$. Trovare la distribuzione di $W = |Z| = (X^2 + Y^2)^{1/2}$.

Esercizio 2
Sia $Z = (X, Y)$ una v.a. bidimensionale con distribuzione uniforme nel triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$. Trovare $\mathbb{E}(X)$, $E(Y)$. Posto $W = Y/X$, determinare la distribuzione di W. Quanto vale la media di W?

Esercizio 3
Siano X e Y v.a. indipendenti, equidistribuite, con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Posto $W = XY$, determinare la distribuzione di W e la sua media.

Esercizio 4
Sia (X, Y) una v.a. bidimensionale con distribuzione congiunta $f(x, y)$. Quanto vale $\mathbb{P}(X \in I \mid Y = y)$?

Esercizio 5
Consideriamo un fascio di rette parallele, equidistanziate, con distanza pari a $2a$; lanciamo su questa superficie un ago di lunghezza $2l$. Determinare la probabilità che l'ago intersechi una di queste rette.

Esercizio 6
Siano $\{X_i\}$ v.a. indipendenti equidistribuite con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Determinare la convergenza delle variabili $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ e $Z_n = nY_n$.

Esercizio 7
Siano $\{X_i\}$ v.a. indipendenti equidistribuite con distribuzione normale $N(0, 1)$. Determinare la legge delle variabili $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$. Determinare la legge limite $Y = \lim Y_n$, $Z = \lim Z_n$ e discutere in quale senso vale il limite.

Esercizio 8
Consideriamo una passeggiata casuale simmetrica $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Per ogni t intero positivo, posto $Y_t^n = S_{tn}/\sqrt{n}$, determinare la legge limite $Y_t = \lim Y_t^n$. Possiamo estendere questa definizione ad ogni $t \geq 0$?

Esercizio 9
Lancio una moneta e sommo i risultati fino a quando non supero 15 teste. Trovare la probabilità che siano necessari più di 30 lanci.

Svolgimento. Poniamo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, dove X ha distribuzione uniforme in $\{0, 1\}$. Posto $n = 30$, si ottiene $\mathbb{P}(N > n) = \mathbb{P}(S_n < 15)$. Posso calcolare direttamente:

$$1 = \mathbb{P}(S_n < 15) + \mathbb{P}(S_n = 15) + \mathbb{P}(S_n > 15)$$

da cui

$$\mathbb{P}(S_n < 15) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(S_n = 15)).$$

La probabilità dell'evento $S_n = 15$ è data da (ricordiamo la formula di Stirling: $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

$$\mathbb{P}(S_n = 15) = \binom{30}{15}\frac{1}{2^{30}} = \frac{30!}{15!15!}\frac{1}{2^{30}}$$

$$\simeq \frac{30^{30}e^{-30}\sqrt{60\pi}}{15^1515^1523^0e^{-15}e^{-15}(30\pi)} = \frac{\sqrt{60}}{30\sqrt{\pi}} \simeq 0,14567$$

da cui

$$\mathbb{P}(S_n < 15) \simeq 0,42716$$

Con l'approssimazione normale si ottiene

$$\mathbb{P}(S_n < 15) = \mathbb{P}(S_n < 14,5) = \mathbb{P}(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{DS(S_n)} < \frac{14,5-15}{\sqrt{15}}) \simeq \Phi(-0,13) = 0,44828$$

Esercizio 10

Lancio un dado e sommo i risultati fino a quando non supero 400. Trovare la probabilità che siano necessari più di 120 lanci.

Svolgimento. Poniamo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, dove X ha distribuzione uniforme in $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Sia ha $\mathbb{E}(X) = 7/2$, $V(X) = 35/12$, quindi $E(S_n) = n\mathbb{E}(X)$, $V(S_n) = nV(X)$. Posto $n = 120$, si ottiene $\mathbb{P}(N > n) = \mathbb{P}(S_n < 400)$. Applico l'approssimazione normale

$$\mathbb{P}(S_n < 399,5) = \Phi(\frac{399,5 - \mathbb{E}(S_n)}{DS(S_n)}) = \Phi(\frac{399,5 - 120 * 7/2}{\sqrt{120 * 35/12}})$$

$$\simeq \Phi(\frac{399,5 - 420}{18,7}) \simeq \Phi(-1,09) = 1 - \Phi(1,09) = 1 - 0,86214 = 0,13786$$

mentre calcolando direttamente

$$\mathbb{P}(S_n < 400) \simeq \Phi(-1,07) = 0,14231$$

con una differenza del 4 per mille circa.