Esercizio 1
Il dado A ha 4 facce rosse e due bianche, il dado B ha due facce rosse e 4 bianche. Una moneta è lanciata, una sola volta. Se è uscita testa, il gioco continua con solo il dado A. Se esce croce, il gioco continua con solo il dado B.

- **a.:** Calcolare la probabilità che, ad ogni tentativo, il lancio del dado risulti in una faccia rossa.
- **b.:** Calcolare la probabilità che al terzo lancio risulti una faccia rossa sapendo che i primi due lanci hanno dato come esito due facce rosse.
- **c.:** Sapendo che nei primi 3 lanci è uscita sempre la faccia rossa, calcolare la probabilità che il dado usato sia A.
- **d.:** *(facoltativo)* Generalizzare il punto **c.**: sapendo che nei primi n lanci è uscita sempre la faccia rossa, calcolare la probabilità che il dado usato sia A.

Esercizio 2
Mostrare che

$$u_0 u_{2n} + u_2 u_{2n-2} + \cdots + u_{2n} u_0 = 1.$$

Esercizio 3
In una coda per acquistare un biglietto che costa 1 Euro, si trovano $2n$ clienti; ogni persona in coda ha una moneta da 1 Euro oppure una moneta da due Euro, con la stessa probabilità. Calcolare la probabilità che il cassiere sia riuscito a dare il resto ad ogni cliente che lo richiedeva nell'ipotesi che al termine della coda rimangano nella cassa $2x$ monete da 1 Euro.

Esercizio 4
Gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ siano indipendenti, con $P(A_j) = p_j$. Trovare la probabilità p che non si verifichi alcuno di questi eventi.

Esercizio 5
Le carte di un mazzo (composto in totale da 52 carte) vengono girate a una a una. Qual è la probabilità che il primo asso venga girato alla k-esima carta? Qual è il valore di k più probabile?

Esercizio 1
Supponiamo che la moneta sia equilibrata. Indichiamo con X l'esito del lancio della moneta e con Y l'esito del lancio del dado. Allora

$$\begin{aligned} P(Y = r) &= P(Y = r, X = t) + P(Y = r, X = c) \\ &= P(Y = r \mid X = t)P(X = t) + P(Y = r \mid X = c)P(X = c) \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Calcoliamo $P(Y_3 = r \mid Y_1 = r, Y_2 = r)$:

$$P(Y_3 = r \mid Y_1 = r, Y_2 = r) = \frac{P(Y_1 = Y_2 = Y_3 = r)}{P(Y_1 = Y_2 = r)}$$

Posso scrivere, per ogni n:

$$\begin{aligned} &P(Y_1 = \cdots = Y_n = r) \\ &= P(Y_1 = \cdots = Y_n = r \mid X = t)P(X = t) + P(Y_1 = \cdots = Y_n = r \mid X = c)P(X = c) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2^n + 1}{3^n}. \end{aligned}$$

Allora

$$P(Y_3 = r \mid Y_1 = r, Y_2 = r) = \frac{\frac{2^3+1}{3^3}}{\frac{2^2+1}{3^2}} = \frac{3}{5}.$$

Infine, supponiamo che $Y_1 = \cdots = Y_n = r$. Utilizziamo la formula delle probabilità totali per calcolare

$$P(X = t \mid Y_1 = \cdots = Y_n = r) = \frac{P(Y_1 = \cdots = Y_n = r \mid X = t)P(X = t)}{P(Y_1 = \cdots = Y_n = r)} = \frac{(\frac{2}{3})^n \frac{1}{2}}{\frac{2^n+1}{3^n}\frac{1}{2}} = \frac{2^n}{2^n + 1}.$$

Nel caso $n = 3$, questo numero è pari a $\frac{8}{9}$.

Esercizio 2
Ricordiamo che

$$u_{2n} = P(S_{2n} = 0) = P(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0).$$

Consideriamo il termine $u_{2k}u_{2n-2k}$ come il prodotto delle probabilità $P(S_{2k} = 0)P(S_{2n-2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0)$. Allora il primo termine della somma è la probabilità dell'evento "ultimo zero al tempo 0", il secondo termine è la probabilità dell'evento "ultimo zero al tempo 2", e così via fino all'ultimo termine, che corrisponde all'evento "ultimo zero al tempo $2n$". È chiaro che questi eventi sono incompatibili e la loro unione include tutti i possibili cammini di lunghezza $2n$, e quindi la probabilità della loro unione, che corrisponde alla somma delle singole probabilità, è 1.

Esercizio 3
Per ottenere la soluzione, possiamo considerare la probabilità che una passeggiata casuale S_k tocchi la linea $x = -1$, condizionata rispetto al dato finale $S_{2n} = 2x$. In tal caso, la probabilità richiesta è data dal rapporto

$$\frac{P(\exists\, k \,:\, S_k = -1, S_{2n} = 2x)}{P(S_{2n} = 2x)}.$$

Per il principio di riflessione, il numeratore è dato da $2^{-2n}[N_{2n,2x} - N_{2n,2x+2}]$ mentre il denominatore è pari a $2^{-2n}N_{2n,2x}$. In totale, la probabilità cercata è pari a

$$\frac{N_{2n,2x} - N_{2n,2x+2}}{N_{2n,2x}} = \frac{2x - 1}{n + x + 1}.$$

Esercizio 4

Perché nessuno degli eventi $A_1, \ldots, A_k$ si verifichi, deve accadere l'evento $A_1^c \cap A_2^c \cdots \cap A_k^c$. L'indipendenza degli eventi $A_1, \ldots, A_k$ implica l'indipendenza di $A_1^c, \ldots, A_k^c$, quindi

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cdots \cap A_k^c) = \prod_{j=1}^{k} P(A_j^c) = \prod_{j=1}^{k} (1 - p_j).$$

Esercizio 5

Indichiamo con T il numero della prima carta che mostra un asso. Dobbiamo calcolare la probabilità che $T = k$. Iniziamo, comunque, con il calcolare la probabilità che $T > k$ per $k = 1, \ldots, 48$. Perchè $T > k$, deve essere che le prime k carte uscite siano state scelte tra le 48 carte del mazzo diverse dall'asso:

$$P(T > k) = \frac{\binom{48}{k}}{\binom{52}{k}} = \frac{48 \cdot 47 \cdot \cdots \cdot (48 - k + 1)}{52 \cdot 51 \cdot \cdots \cdot (52 - k + 1)}.$$

L'evento $T = k$ è uguale all'evento $(T > k - 1) \cap (T > k)^c$ e si ha

$$P(T = k) = P(T > k - 1) - P(T > k).$$

Usando l'espressione calcolata in precedenza,

$$P(T = k) = 4 \frac{48!}{52!} \frac{(52 - k)!}{(49 - k)!}.$$

Inoltre, con un semplice calcolo si ottiene

$$P(T = k) = \frac{(52 - k)}{(49 - k)} P(T = k + 1) \geq P(T = k + 1)$$

da cui si ottiene che il valore massimo di $P(T = k)$ si raggiunge per $k = 1$.

Esercizio 1

Siano X_1 e X_2 variabili casuali indipendenti con distribuzione di Poisson rispettivamente di parametro λ_1 e λ_2. Dimostrare che la somma $X_1 + X_2$ ha ancora una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda_1 + \lambda_2$. Trovare infine la distribuzione condizionale di X_1 sapendo $X_1 + X_2 = n$.

Esercizio 2

Nella trasmissione di una immagine il colore di ogni pixel viene descritto da una successione di 8 bit $(a_1, \ldots, a_8)$, ognuno dei quali può assumere solo i valori 0 o 1. Durante la trasmissione si può avere una distorsione di ogni singolo bit con probabilità $p = 2 \times 10^{-4}$ e per di più indipendentemente da un bit all'altro.

a. Qual è la probabilità che un singolo pixel venga trasmesso correttamente?
b. Supponiamo che l'immagine da trasmettere sia composta da $N = 512 \times 256 = 131072$ pixel. Qual è il numero medio di pixel distorti nell'immagine trasmessa?
c. Calcolare approssimativamente la probabilità che il numero di pixel distorti sia maggiore (ossia $\geq$) di 200.

Esercizio 3

Le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_N$ siano indipendenti ed equidistribuite con distribuzione di Poisson di parametro λ. Sia $M = \frac{1}{N}(X_1 + \cdots + X_N)$.

a. Determinare la media e la varianza di M.
b. Descrivere la distribuzione di M.

Esercizio 4

Una fabbrica possiede due diverse linee di produzione che producono componenti esternamente identici ma di differente qualità. I pezzi provenienti dalla linea A sono una proporzione $p_A > 0$ del totale ed hanno un tempo di vita distribuito secondo una legge esponenziale di parametro λ, i pezzi provenienti dalla linea B sono una proporzione $p_B > 0$ del totale ($p_A + p_B = 1$) ed hanno un tempo di vita distribuito secondo una legge esponenziale di parametro $\mu > \lambda$.

a. Un pezzo viene scelto a caso ed indichiamo con T il suo tempo di vita. Qual è la legge di T? Qual è il valor medio di T?
b. Sapendo che il pezzo è ancora funzionante al tempo s, qual è la probabilità che esso venga dalla linea A? Quanto vale questa probabilità per $s \to \infty$?

Soluzioni della seconda provetta

Esercizio 1

Dobbiamo calcolare la probabilità

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n-k)$$

dove abbiamo usato il fatto che X_1 e X_2 sono indipendenti. Ricordiamo ora che la distribuzione di Poisson è data da

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!};$$

sostituendo nell'espressione precedente:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

Raccogliendo i termini costanti

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

e moltiplicando e dividendo per $n!$:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

e nell'ultima sommatoria si riconosce lo sviluppo di $(\lambda_1 + \lambda_2)^n$, da cui

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}.$$

Passiamo al secondo punto. Poiché una variabile con distribuzione di Poisson assume valori non negativi, la distribuzione di X_1 sapendo che $X_1 + X_2 = n$ assume valori solo sugli interi compresi tra 0 e n.

Per ogni $k = 0, \ldots, n$:

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k, X_1 + X_2 = n)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)}$$

sostituendo i rispettivi valori

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}$$

e semplificando questa espressione

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}$$

in cui riconosciamo una distribuzione binomiale di parametri n e $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Esercizio 2
Per un dato pixel, indichiamo con A_j, $j = 1, \dots, 8$, l'evento "il bit a_j giunge corretto" e con A l'evento "il pixel (tutti gli otto bit) giunge corretto". Allora $A = A_1 \cap \dots \cap A_8$ e per la supposta indipendenza nella trasmissione dei bit:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_8) = (1-p)^8 \simeq 0.9984$$

Passiamo al punto **b.**. Indichiamo con X_j l'evento "il pixel j giunge distorto", $j = 1, \dots, N$. X_j ha distribuzione di Bernoulli di parametro $q = 1 - 0.9984$; indichiamo con $X = X_1 + \dots + X_N$ il numero totale di pixel distorti. Allora X ha distribuzione binomiale di parametri N e q, media

$$\mathbb{E}(X) = N \times q = 209.7$$

e varianza

$$V(X) = N \times q \times (1-q) = 209.2$$

Per calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(X \geq 200)$ posso utilizzare l'approssimazione normale alla binomiale:

$$\mathbb{P}(X \geq 200) = \mathbb{P}(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{V(X)}} \geq \frac{200 - 209.7}{14.4}) \simeq 1 - \Phi(-0.70) \simeq 0.76$$

Esercizio 3
Come abbiamo visto nell'esercizio 1, la variabile $X_1 + \dots + X_N := Y$ ha distribuzione di Poisson di parametro $N\lambda$.

Per le proprietà di media e varianza:

$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}(\frac{1}{N}Y) = \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{N}(N\lambda) = \lambda;$$

e

$$V(M) = V(\frac{1}{N}Y) = \frac{1}{N^2}V(Y) = \frac{1}{N^2}(N\lambda) = \frac{1}{N}\lambda.$$

Quali sono i valori assunti dalla variabile aleatoria M? Siccome Y è distribuita sugli interi $k \geq 0$, $M = \frac{Y}{N}$ è distribuita sui razionali della forma $\frac{k}{N}$, k intero, $k \geq 0$. Infine, la distribuzione di M è data dalla formula

$$\mathbb{P}(M = \frac{k}{N}) = \mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda N}\frac{(N\lambda)^k}{k!}.$$

Esercizio 4
Calcoliamo la funzione di ripartizione di T. Indichiamo con A e B, rispettivamente, gli eventi "il pezzo esce dalla linea A", "il pezzo esce dalla linea B". Allora $\mathbb{P}(A) = p_A$, $\mathbb{P}(B) = p_B$.

Sappiamo che T condizionato a A ha distribuzione esponenziale di parametro λ e T condizionato a A ha distribuzione esponenziale di parametro μ. Ricordiamo che una legge esponenziale di parametro λ ha funzione di ripartizione $\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ per $t \geq 0$, si ottiene

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(T \leq t \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T \leq t \mid B)\mathbb{P}(B) = p_A(1 - e^{-\lambda t} + p_B(1 - e^{-\mu t})$$

che possiamo anche scrivere

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - p_A e^{-\lambda t} - p_B e^{-\mu t}, \qquad t \geq 0.$$

Calcoliamo la funzione densità attraverso la derivata dell'espressione precedente:

$$f_T(t) = f(t) = \lambda p_A e^{-\lambda t} + \mu p_B e^{-\mu t}, \qquad t > 0$$

e quindi

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty t f(t)\, dt = p_A \frac{1}{\lambda} + p_B \frac{1}{\mu}.$$

Passiamo ora al punto B. Si tratta di calcolare $\mathbb{P}(A \mid T > s)$. Dalla definizione di probabilità condizionata

$$\mathbb{P}(A \mid T > s) = \frac{\mathbb{P}(T > s \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T > s)} = \frac{p_A e^{-\lambda s}}{p_A e^{-\lambda s} + p_B e^{-\mu s}} = \frac{p_A}{p_A + p_B e^{(\lambda-\mu)s}}$$

Per $s \to \infty$, ricordando che $\mu > \lambda$, questa espressione tende a 1, dunque più s è grande e più è probabile che venga dalla prima linea di produzione.

Esercizio 1
Siano X, Y due variabili casuali indipendenti tali che la distribuzione di probabilità di ognuna è la distribuzione geometrica $(p_k = pq^k, k = 0, 1, 2, \ldots, 0 < p < 1, p + q = 1)$

a) Poniamo $Z = \max(X, Y)$. Trovare la distribuzione congiunta della coppia (X, Z) e la distribuzione di Z.
b) Mostrare che la distribuzione condizionale di X dato $X + Y$ è uniforme (cioè i differenti casi possibili sono equiprobabili).

Esercizio 2
Siano X e Y due variabili casuali, a valori interi, indipendenti e con la stessa distribuzione di probabilità $P(X = k) = p_k$ con $k = 1, 2, \cdots$. Trovare $P(X < Y)$.

Esercizio 3
La durata di funzionamento di un transistor in un sistema è aleatoria. Supponiamo che la probabilità che un transistor sia attivo dopo un intervallo di tempo t da quando è stato utilizzato segua una legge esponenziale.

a) Supponiamo che la durata media sia di 1000 ore; quale è la probabilità che 4 transistor (dello stesso tipo), messi in funzione ognuno dopo la rottura del precedente, si guastino in 2000 ore?
b) Poniamo N il numero di transistor necessari per far funzionare il sistema per 2000 ore. Qual è la distribuzione di N se consideriamo che le durate di funzionamento dei transistor sono indipendenti le une dalle altre? Qual è il valore medio di N?
c) Supponiamo di avere a disposizione anche un secondo tipo di transistor, avente durata di vita media 2000 ore. Il costo del primo transistor è di 1 Euro, il costo del secondo è di 2 Euro. Qual è il transistor più conveniente?

Esercizio 4
Si sa che il voto di maturità degli studenti segue una legge normale con media 75 cm e varianza 104. Qual è la percentuale dei voti più alti di 81? I candidati con voto inferiore a 60 vengono bocciati. Qual è la percentuale di bocciati?

Esercizio 1
Sia $Z = \max(X, Y)$. Scriviamo

$$\mathbb{P}(X = x, Z = z) = \mathbb{P}(Z = z \mid X = x)\mathbb{P}(X = x)$$

allora, se $z < x$, $\mathbb{P}(Z = z \mid X = x) = 0$; se $z > x$, $\mathbb{P}(Z = z \mid X = x) = \mathbb{P}(Y = z)$ e infine, se $z = x$, $\mathbb{P}(Z = z \mid X = x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$. Calcoliamo $\mathbb{P}(Y \leq x) = \sum_{n=0}^{x} pq^n = 1 - q^{x+1}$. In definitiva,

$$\mathbb{P}(X = x, Z = z) = \begin{cases} 0, & z < x \\ pq^x(1 - q^{x+1}), & z = x \\ p^2 q^{x+z}, & z > x. \end{cases}$$

Per ottenere la distribuzione di Z, a questo punto, possiamo ragionare in questo modo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = z, X = x) \\ &= \sum_{x=0}^{z-1} \mathbb{P}(Z = z, X = x) + \mathbb{P}(Z = z, X = z) \\ &= \sum_{x=0}^{z-1} p^2 q^{x+z} + pq^z(1 - q^{z+1}) \\ &= pq^z(2 - q^z - q^{z+1}). \end{aligned}$$

Passiamo al punto **b)**. Fissato k, dobbiamo studiare $\mathbb{P}(X = j \mid X + Y = k)$. Osserviamo che Y assume valori non negativi, da cui $j \leq k$. Voglio ora mostrare che il valore $\mathbb{P}(X = j \mid X + Y = k)$ è indipendente da j.

Iniziamo con il calcolare

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k - j) = \sum_{j=0}^{k} pq^j pq^{k-j} = (k + 1)p^2 q^k.$$

Allora

$$\mathbb{P}(X = j \mid X + Y = k) = \frac{\mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k - j)}{\mathbb{P}(X + Y = k)} = \frac{pq^j pq^{k-j}}{(k + 1)p^2 q^k} = \frac{1}{k + 1}.$$

Quindi la distribuzione condizionale di X dato $X + Y$ è uniforme su $0, 1, \dots, X + Y$.

Un errore comune è stato di pensare $\mathbb{P}(Z = X) = 1/2$. Questo è falso. Un calcolo mostra che

$$\mathbb{P}(Z = X) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x, Y \leq x) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{x} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

e svolgendo i passaggi si ottiene

$$\mathbb{P}(Z = X) = \frac{1}{1 + q}.$$

Esercizio 2

Per la simmetria del problema, $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X < Y)$, quindi $2\mathbb{P}(X < Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y)$. Calcoliamo allora

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^2.$$

In definitiva,

$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} p_k^2.$$

Esercizio 3

Indichiamo con T_1, T_2, ..., le durate di funzionamento dei transistor; dobbiamo calcolare la probabilità

$$\mathbb{P}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \le 2000).$$

Iniziamo con il calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 + T_2 \le t) &= \int_0^t \mathbb{P}(T_1 \in ds)\mathbb{P}(T_2 \le t - s) \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda(t-s)})\, ds \\
&= 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t).
\end{aligned}$$

Voglio mostrare che

$$\mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_n \le t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{1}$$

Possiamo mostrarlo per induzione. Abbiamo già visto che la formula è vera per $n = 2$, ed inoltre sappiamo che è vera per $n = 1$ (distribuzione esponenziale). Supponiamolo vero per n e mostriamolo per $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_n + T_{n+1} \le t) &= \int_0^t \mathbb{P}(T_1 \in ds)\mathbb{P}(T_2 + \cdots + T_{n+1} \le t - s) \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\Big[1 - e^{-\lambda(t-s)}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}\Big]\, ds \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\, ds - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}\, ds \\
&= (1 - e^{-\lambda t}) - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

In particolare, per una variabile esponenziale T, risulta $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$ e, nel nostro caso, $\lambda = 1/1000$. Per la domanda **a)**, dobbiamo scegliere nella formula (1) $n = 4$, $\lambda = 1/1000$ e $t = 2000 = 2/\lambda$:

$$\mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_4 \le 2000) = 1 - e^{-2}\Big[1 + 2 + 2 + \frac{8}{6}\Big] \simeq 0.143$$

Per la domanda **b)**, osserviamo che $N = 1$ se $T_1 > 2000$. Usiamo più di $N = 1$ transistor se $T_1 < 2000$, usiamo più di $N = 2$ transistor se $T_1 + T_2 < 2000$, ed in generale usiamo più di $N = n$ transistor se $T_1 + \cdots + T_n < 2000$. Allora

$$\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(T_1 > 2000) = e^{-\lambda t},$$

mentre per calcolare $\mathbb{P}(N=2)$ scrivo $\{N=2\}=\{N>1\}\setminus\{N>2\}$, ossia

$$\mathbb{P}(N=2)=\mathbb{P}(N>1)-\mathbb{P}(N>2)=(1-e^{\lambda t})-(1-e^{\lambda t}(1+\lambda t))=(\lambda t)e^{\lambda t}$$

ed in generale, usando ancora la formula (1),

$$\mathbb{P}(N=n)=\mathbb{P}(N>n-1)-\mathbb{P}(N>n)=\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}.$$

Si nota che N è "quasi" una variabile con distribuzione di Poisson; in realtà, la variabile $M=N-1$ è una variabile con distribuzione di Poisson di parametro λt, quindi M ha media $\mathbb{E}(M)=\lambda t$ e N ha media $\mathbb{E}(N)=\mathbb{E}(M)+1=\lambda t+1=2+1=3$.

Per i dati del problema e quanto calcolato nel punto **b)**, per fare funzionare l'apparecchio 2000 ore si ha bisogno in media di 3 transistor, con un costo medio di 3 Euro.

Indichiamo ora con $\lambda_2=1/2000$ il parametro che individua la distribuzione del secondo transistor. Indichiamo con N_2 il numero di transistor del secondo tipo che si usano per far funzionare l'apparecchio per $t=2000$ ore. Il numero medio di tali transistor è (come prima) $\mathbb{E}(N_2)=\lambda_2 t+1=1+1=2$. Il costo medio per fare funzionare l'apparecchio, con questo secondo tipo di transistor, è 4 Euro: è conveniente usare i transistor del primo tipo.

Esercizio 4

Indichiamo con $X\sim\mathcal{N}(75,104)$ la distribuzione dei voti. Allora,

$$\mathbb{P}(X>81)=1-\mathbb{P}(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{V(X)}}\leq\frac{81-75}{\sqrt{104}})\simeq 1-\Phi(0.59)\simeq 0.2776$$

$$\mathbb{P}(X<60)=\mathbb{P}(X\leq 59)=\mathbb{P}(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{V(X)}}\leq\frac{59-75}{\sqrt{104}})\simeq 1-\Phi(1.57)\simeq 0.05821$$

Anno Accademico 2001/02 *Povo, 2 luglio 2002*

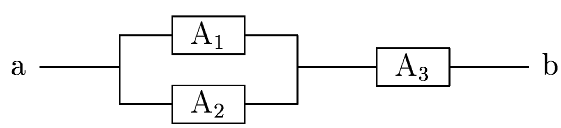
Prova scritta dell'esame di *Calcolo delle Probabilità* 1ª *U.D.*

1. Supponiamo che, ad una visita di controllo per l'epatite, sia α la probabilità che una persona, che abbia contratto la malattia, risulti malata e $1-\beta$ la probabilità che una persona sana risulti sana. Sia inoltre ρ il rapporto tra il numero di persone malate e la popolazione totale (tasso d'incidenza). Quale è la probabilità che una persona sia sana sebbene alla visita di controllo sia risultata malata?

2. Due persone lanciano a turno una moneta. Vince chi ottiene per primo *testa* (sia p la probabilità che in un lancio esca *testa*). Quale è la probabilità che
(i) il gioco finisca prima del quarto lancio?
(ii) il primo giocatore vinca il gioco?
(iii) il secondo giocatore vinca il gioco?

3. Nel gioco di testa e croce si lanci una moneta tante volte finché non esca r volte testa, e si denoti con X il numero totale di lanci. Supponendo che la probabilità che esca testa in un lancio sia p, trovare la distribuzione di probabilità di X e si calcoli $\mathbf{E}(r/X)$.

4. Il sistema in figura è formato da 3 dispositivi di durate aleatorie tra loro indipendenti, la cui distribuzione di probabilità è quella esponenziale di parametri rispettivamente λ_1, λ_2 e λ_3. Il sistema funziona se A_3 ed almeno uno tra A_1 e A_2 funzionano.



Dopo aver calcolato la distribuzione di probabilità della durata aleatoria del sistema, calcolare il tempo medio di funzionamento.

5. (*facoltativo*) Supponiamo di avere due variabili casuali X e Y la cui distribuzione congiunta sia

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Calcolare la densità della probabilità condizionata $\mathbf{P}(X \in I | X+Y=s)$.

6. Siano Y_1, Y_2, X tre variabili casuali indipendenti. Siano $f_1(t)$, $f_2(t)$ le funzioni caratteristiche rispettivamente di Y_1 e Y_2; inoltre $X=1$ con probabilità p e $X=0$ con probabilità $1-p$. Calcolare la funzione caratteristica di $Z = XY_1 + (1-X)Y_2$.

Calcolo delle Probabilità 1.U.D. **anno accademico 2001/02**

Prova d'esame 29 luglio 2002

Esercizio 1
Per $r > 0$, $\lambda > 0$, data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+\lambda}} & x > r \\ 0 & x \leq r \end{cases}$$

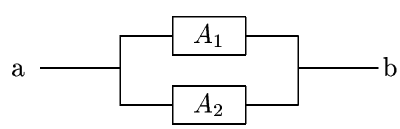
determinare c in modo che la funzione f sia una densità di probabilità. Inoltre, indicando con X una variabile casuale la cui distribuzione ammetta come densità f, indicare per quali valor di λ la variabile casuale X ha valore di aspettazione finito e per quali valori di λ la variabile casuale X ha varianza finita. Determinare infine la distribuzione di probabilità della variabile casuale $Y = \log(X/r)$.

Esercizio 2
Un'urna contiene n palline numerate da 1 a n. Si eseguono successive estrazioni (con reimbussolamento) fino a quando non si estrae un numero inferiore o uguale a quello estratto immediatamente prima.
(a) per ogni intero positivo k, si calcoli la probabilità che il numero delle estrazioni eseguite risulti maggiore di k.
(b) Si calcoli il valor medio del numero di estrazioni eseguite.
$\mathbb{P}(N > k) = \mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3 < \ldots < X_k)$ = *numero di k-uple di interi tra 1 ed n e ciascuna di queste k-uple ha probabilità $\frac{1}{n^k}$; quindi ...*

Esercizio 3
Trentatré cacciatori sparano simultaneamente ad un fagiano. Il fagiano cade ucciso da una sola pallottola. Uno dei cacciatori, tale Sergio, colpisce il bersaglio 8 volte su 10, mentre tutti gli altri lo colpiscono solo 2 volte su 10. Quale è la probabilità che sia stato Sergio a colpire il fagiano?

Esercizio 4
Supponiamo che ogni persona, passando davanti ad una determinata edicola, compri il giornale con probabilità p ed in modo indipendente dalle altre persone. Trovare la distribuzione di probabilità del numero X di persone che non comprano il giornale prima che siano state vendute N copie.

Esercizio 5
Il sistema in figura è formato da 2 dispositivi di durate aleatorie tra loro indipendenti, la cui distribuzione di probabilità è quella esponenziale di parametri rispettivamente λ_1, λ_2. Il sistema funziona se almeno uno tra A_1 e A_2 funziona.



Dopo aver calcolato la distribuzione di probabilità della durata aleatoria del sistema, calcolare il tempo medio di funzionamento e confrontarlo con il più grande tra i due tempi medi di funzionamento. E se i dispositivi fossero tre in parallelo?

Esercizio 6

[Per gli studenti della laurea quadriennale]

Discutere se la funzione $\phi(x) = \cos(x)$ è funzione caratteristica di una qualche variabile aleatoria e, nel caso, identificare tale variabile.

Esercizio 1. Per $r > 0$, $\lambda > 0$, data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+\lambda}} & x > r \\ \\ 0 & x \leq r \end{cases}$$

determinare c in modo che la funzione f sia una densità di probabilità.

Inoltre, indicando con X una variabile casuale la cui distribuzione ammetta come densità f, indicare per quali valor di λ la variabile casuale X ha valore di aspettazione finito e per quali valori di λ la variabile casuale X ha varianza finita.

Determinare infine la distribuzione di probabilità della variabile casuale $Y = \log(X/r)$.

Soluzione 1. Dobbiamo trovare c tale che $\int f(x)\,dx = 1$. Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_r^\infty \frac{c}{x^{1+\lambda}}\,dx = \frac{cr^{-\lambda}}{\lambda}$$

da cui si ottiene

$$c = \lambda r^\lambda.$$

La variabile X ha media, risp. varianza, finita se l'integrale $\int x^n f(x)\,dx < \infty$ per $n = 1$, risp. $n = 2$. Calcolando l'integrale:

$$\int_r^\infty x^n \frac{\lambda r^\lambda}{x^{1+\lambda}}\,dx = \lambda r^\lambda \int_r^\infty x^{n-1-\lambda}\,dx$$

si ottiene che questo integrale è finito se e solo se $n - \lambda < 0$. Quindi, X ha media finita se $\lambda > 1$ e varianza finita se $\lambda > 2$.

Definiamo $Y = \log(X/r)$: siccome $x \geq r$, si avrà $Y \geq 0$. Per ogni $t > 0$ calcoliamo

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\log(X/r) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq re^t) = \lambda r^\lambda \int_r^{re^t} x^{-\lambda-1}\,dx = r^\lambda \left(r^{-\lambda} - (re^t)^{-\lambda}\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$

quindi Y ha distribuzione esponenziale di parametro λ.

Esercizio 2. Un'urna contiene n palline numerate da 1 a n. Si eseguono successive estrazioni (con reimbussolamento) fino a quando non si estrae un numero inferiore o uguale a quello estratto immediatamente prima.

(a) per ogni intero positivo k, si calcoli la probabilità che il numero delle estrazioni eseguite risulti maggiore di k.

(b) Si calcoli il valor medio del numero di estrazioni eseguite.

$\mathbb{P}(N > k) = \mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3 < \ldots < X_k)$ = *numero di k-uple di interi tra 1 ed n e ciascuna di queste k-uple ha probabilità $\frac{1}{n^k}$; quindi ...*

Soluzione 2. Indichiamo con N il numero di estrazioni eseguite. Allora, $\mathbb{P}(N > 1) = 1$, perché almeno due palline devono uscire, mentre $\mathbb{P}(N > n + 1) = 0$, perché il caso peggiore è l'uscita, nelle prime n estrazioni, della successione $(1, 2, 3, \ldots, n)$, ma all'estrazione successiva deve uscire un numero minore o uguale a n.

L'evento $N > k$ corrisponde alle successioni $(X_1 < X_2 < \cdots < X_k)$. Il numero di queste successioni è pari al numero di k-uple distinte che possiamo scegliere in $\{1, 2, \ldots, n\}$, mentre la probabilità di ognuna di queste successioni è $1/n^k$, quindi

$$\mathbb{P}(N > k) = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

La media di N corrisponde alla somma

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(N > k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} 1^{n-k} = (\frac{1}{n} + 1)^n.$$

Esercizio 3. Trentatré cacciatori sparano simultaneamente ad un fagiano. Il fagiano cade ucciso da una sola pallottola. Uno dei cacciatori, tale Sergio, colpisce il bersaglio 8 volte su 10, mentre tutti gli altri lo colpiscono solo 2 volte su 10. Quale è la probabilità che sia stato Sergio a colpire il fagiano?

Soluzione 3. Indichiamo con $p = 0.8$ la probabilità che Sergio colpisca il bersaglio, e con $q = 0.2$ la probabilità che un cacciatore (tranne Sergio) colpisca un bersaglio. Sia inoltre $N = 33$ il numero di cacciatori.

Calcoliamo la probabilità dell'evento S che Sergio (e solo lui) colpisca il fagiano:

$$\mathbb{P}(S) = p * (1-q)N - 1 = p^N.$$

Consideriamo ora l'evento A che Sergio sbagli e uno (e uno solo) degli altri colpisca il fagiano:

$$\mathbb{P}(A) = (1-p) * \binom{N-1}{1} q^1 (1-q)^{N-2} = (N-1) q^2 p^{N-2}.$$

Cosideriamo l'evento $F = S \cup A$: il fagiano cade ucciso da un solo proiettile. Allora la probabilità che sia stato Sergio è

$$\frac{\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(A)} = \frac{p^N}{p^N + (N-1)q^2 p^{N-2}} = \frac{p^2}{p^2 + (N-1)q^2} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 4. Supponiamo che ogni persona, passando davanti ad una determinata edicola, compri il giornale con probabilità p ed in modo indipendente dalle altre persone. Trovare la distribuzione di probabilità del numero X di persone che non comprano il giornale prima che siano state vendute N copie.

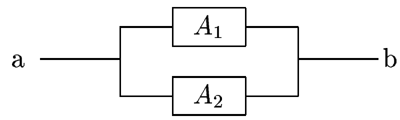
Soluzione 4. Al momento in cui viene venduta l'N-esima copia del giornale, sono passate davanti all'edicola $T = N + X$ persone. Allora, l'evento $(X = k)$ corrisponde all'evento $N - 1$ giornali venduti dopo che sono passate le prime $N - 1 + k$ persone, la persona $N + k$ compra il giornale, quindi

$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(N-1$ giornali venduti su $N-1+k$ persone$)\cdot\mathbb{P}($1giornale venduto alla n-esima persona$)$

che risulta

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{N-1+k}{N-1} p^{N-1} (1-p)^k \cdot p = \binom{N-1+k}{N-1} p^N (1-p)^k.$$

Esercizio 5. Il sistema in figura è formato da 2 dispositivi di durate aleatorie tra loro indipendenti, la cui distribuzione di probabilità è quella esponenziale di parametri rispettivamente λ_1, λ_2. Il sistema funziona se almeno uno tra A_1 e A_2 funziona.



Dopo aver calcolato la distribuzione di probabilità della durata aleatoria del sistema, calcolare il tempo medio di funzionamento e confrontarlo con il più grande tra i due tempi medi di funzionamento. E se i dispositivi fossero tre in parallelo?

Soluzione 5. Sia T (risp. T_1, T_2) il tempo di funzionamento del sistema (risp. di A_1, A_2). Allora $T < t$ se e solo se sono verificate entrambe le relazioni $T_1 < t$ e $T_2 < t$, da cui:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T < t) &= \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 < t) = \mathbb{P}(T_1 < t)\mathbb{P}(T_2 < t)\\ &= (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) = 1 - (e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}) + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\end{aligned}$$

Per calcolare la media, usiamo la seguente formula, valida anche per le variabili continue (positive):

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}\, dt - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\, dt = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Risulta allora $\mathbb{E}(T) > \max(\mathbb{E}(T_1), \mathbb{E}(T_2))$. Se fosse, ad esempio, $\lambda_1 = \lambda_2$, ossia $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{\lambda}$, sarebbe $\mathbb{E}(T) = \frac{3}{2}\mathbb{E}(T_1)$.

Nel caso i componenti fossero stati 3, la media di T sarebbe ancora maggiore del massimo $\max(\mathbb{E}(T_1), \mathbb{E}(T_2), \mathbb{E}(T_3))$. Così, ad esempio, se fosse $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, si ottiene $\mathbb{E}(T) = \frac{11}{6}\mathbb{E}(T_1)$.

0.1. **Esercizio 6.** Discutere se la funzione $\phi(x) = \cos(x)$ è funzione caratteristica di una qualche variabile aleatoria e, nel caso, identificare tale variabile.

0.2. **Soluzione 6.** La funzione $\phi(x) = \cos(x)$ verifica $\phi(0) = 1$, ϕ è assolutamente continua sull'asse reale ed inoltre è una funzione pari. Quindi, soddisfa le condizioni necessarie per essere una funzione caratteristica. Invece di discutere la condizione sufficiente (ϕ deve essere definita positiva: per ogni scelta di tempi $t_1, \ldots, t_n$ e di valori $\xi_1, \ldots, \xi_n$, deve essere $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n \phi(t_i - t_j)\xi_i\xi_j \geq 0$), passiamo a discutere che forma dovrebbe avere una variabile aleatoria X che avesse ϕ come funzione caratteristica.

Si osserva che

$$\phi(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

e, ricordando che una variabile aleatoria costante in a ha funzione caratteristica e^{iat}, si vede che X è la variabile aleatoria che assume i valori 1 e -1 con probabilità $1/2$.

Quindi, partendo dalla X appena determinata, la sua funzione caratteristica è proprio ϕ.

Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

1. Consideriamo per $\theta \in [-2, 2]$ la funzione definita da

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x + 1 - \frac{\theta}{2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Mostrare che per ogni $\theta \in [-2, 2]$ f_θ è una densità di probabilità.
b) Sia X una variabile casuale di densità f_θ. Calcolare, in funzione di θ, media e varianza di X.
c) Qual è per $\theta = 0$ la distribuzione di probabilità di $-2 \log X$?

2. Due sottoinsiemi A_1 e A_2 sono scelti dall'insieme $S = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ casualmente ed indipendentemente al seguente modo: ogni elemento di S è incluso in A_i con probabilità p ed in modo indipendente dagli altri elementi. La probabilità che un elemento non sia incluso è ovviamente $q = 1 - p$. Calcolare la probabilità che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

3. Un canale di trasmissione dati può ricevere messaggi binari da due sorgenti diverse A e B con probabilità $\frac{1}{2}$ ciascuna. Ognuna delle due sorgenti produce messaggi in cui i bit successivi sono tra loro indipendenti. Per la sorgente A però i bit possono essere 1 oppure 0 con probabilità $\frac{1}{2}$, mentre per B il valore 1 si verifica con probabilità $\frac{1}{4}$ e 0 con probabilità $\frac{3}{4}$. Un messaggio di lunghezza n viene ricevuto e in esso si osserva una proporzione di 1 pari a 0.4 (cioè in esso si trovano $n \cdot 0.4$ bit uguali a 1).
a) Supponiamo $n = 10$. Qual è la probabilità che si tratti della sorgente A? Quale delle due sorgenti è la più probabile? E se invece fosse $n = 100$?

4. Un punto casuale (ξ_1, ξ_2) è uniformemente distribuito nel quadrato $K = \{(u, v) \colon 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$. Sia η il numero di radici reali del polinomio $f_{\xi_1,\xi_2}(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2\, x + \xi_2$. Calcolare le probabilità

$$\mathbf{P}(\eta = k), \qquad k = 1, 3.$$

5. *(laurea triennale)* Siano X_1, X_2 e X_3 variabili casuali indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Indichiamo con $X_{(1)}$,$X_{(2)}$ e $X_{(3)}$ gli stessi numeri riordinati in senso crescente. In particolare

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, X_3) \qquad X_{(3)} = \max(X_1, X_2, X_3)$$

mentre $X_{(2)}$ è il valore intermedio.

Calcolare le distribuzioni di probabilità di $X_{(1)}$ e di $X_{(3)}$.

5. *(laurea quadriennale)* Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili casuali indipendenti. Ogni X_n abbia una distribuzione di probabilità esponenziale di parametro c^n con $c > 0$. Al variare di c discutere la convergenza in distribuzione della successione delle $Y_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Povo, 11 settembre 2002