Cardinalità infinite

Seminario

Ester Dalvit

25 gennaio 2005

Cardinalità

Dati due insiemi A e B, essi hanno la *stessa cardinalità* se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di A e gli elementi di B.

Cardinalità

Dati due insiemi A e B, essi hanno la *stessa cardinalità* se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di A e gli elementi di B.

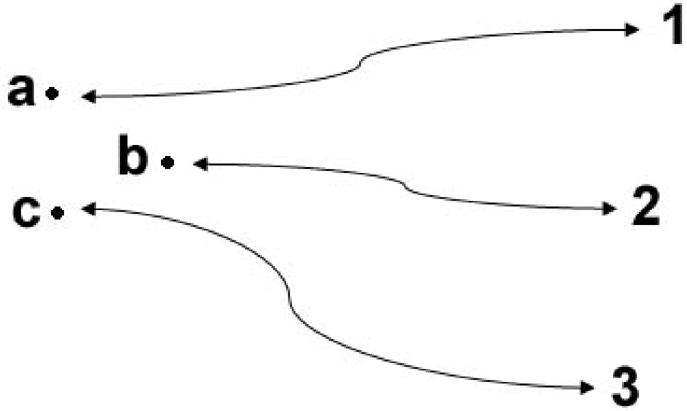
Diremo anche che A e B hanno lo *stesso numero cardinale* o che sono *equivalenti* o *equipotenti* e scriveremo $\#A = \#B$.

Cardinalità

Dati due insiemi A e B, essi hanno la *stessa cardinalità* se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di A e gli elementi di B.

Diremo anche che A e B hanno lo *stesso numero cardinale* o che sono *equivalenti* o *equipotenti* e scriveremo $\#A = \#B$.

Ponendo una corrispondenza biunivoca tra insiemi finiti riusciamo a *contare*.



L’albergo infinito

In una città c’è un albergo con infinite camere numerate con i numeri naturali, tutte occupate dai matematici giunti fin lì per un convegno.

L’albergo infinito

In una città c’è un albergo con infinite camere numerate con i numeri naturali, tutte occupate dai matematici giunti fin lì per un convegno.

Un giorno arrivano però altri 10 matematici: possono trovare posto nell’albergo?

L'albergo infinito

In una città c'è un albergo con infinite camere numerate con i numeri naturali, tutte occupate dai matematici giunti fin lì per un convegno.

Un giorno arrivano però altri 10 matematici: possono trovare posto nell'albergo?

Sì, basta dire ad ogni ospite di osservare il numero n della sua camera e spostarsi nella camera $n+10$. Poiché per ogni n naturale esiste il numero $n+10$ tutti troveranno posto e si libereranno i primi 10 posti per i nuovi ospiti.

L’albergo infinito

In una città c’è un albergo con infinite camere numerate con i numeri naturali, tutte occupate dai matematici giunti fin lì per un convegno.

Il giorno seguente arrivano altri matematici, tanti quanti quelli già alloggiati nell’albergo: c’è ugualmente posto per tutti?

L'albergo infinito

In una città c'è un albergo con infinite camere numerate con i numeri naturali, tutte occupate dai matematici giunti fin lì per un convegno.

Il giorno seguente arrivano altri matematici, tanti quanti quelli già alloggiati nell'albergo: c'è ugualmente posto per tutti?

Certo, è sufficiente far spostare ogni ospite, alloggiato in una camera n, nella camera $2n$.
In questo modo vengono occupate solo le camere pari e si liberano tutte quelle dispari, che verranno assegnate ai nuovi arrivati.

I numeri naturali

Con questo esempio abbiamo visto una proprietà importante: l’insieme dei numeri naturali può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

I numeri naturali

Con questo esempio abbiamo visto una proprietà importante: l'insieme dei numeri naturali può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

Ecco la corrispondenza biunivoca che abbiamo posto nel primo esempio.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 11 & 12 & 13 & 14 & \cdots & n+10 & \cdots \end{array}$$

L'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$ è una parte propria dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

I numeri naturali

Con questo esempio abbiamo visto una proprietà importante: l'insieme dei numeri naturali può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

Ecco la corrispondenza biunivoca che abbiamo posto nel secondo esempio.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

L'insieme dei numeri naturali pari è una parte propria dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Insiemi numerabili

Diciamo che un insieme è *numerabile* se può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Insiemi numerabili

Diciamo che un insieme è *numerabile* se può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Abbiamo appena alcuni esempi di insiemi numerabili:

Insiemi numerabili

Diciamo che un insieme è *numerabile* se può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Abbiamo appena alcuni esempi di insiemi numerabili:

- i naturali maggiori di 10

Insiemi numerabili

Diciamo che un insieme è *numerabile* se può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Abbiamo appena alcuni esempi di insiemi numerabili:

- i naturali maggiori di 10
- i numeri pari

Insiemi numerabili

Diciamo che un insieme è *numerabile* se può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Abbiamo appena alcuni esempi di insiemi numerabili:

- i naturali maggiori di 10
- i numeri pari
- i numeri dispari

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.*

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.*

Sia X un insieme infinito e sia $\varphi : \mathcal{P}(X) \to X$ una funzione di scelta per X.

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.*

Sia X un insieme infinito e sia $\varphi : \mathcal{P}(X) \to X$ una funzione di scelta per X.
Definiamo una successione di elementi di X:

$$a_0 = \varphi(X)$$
$$a_n = \varphi(X \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\})$$

Gli a_n sono distinti.

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.*

Sia X un insieme infinito e sia $\varphi : \mathcal{P}(X) \to X$ una funzione di scelta per X.
Definiamo una successione di elementi di X:

$$a_0 = \varphi(X)$$
$$a_n = \varphi(X \setminus \{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\})$$

Gli a_n sono distinti. L'insieme $X \setminus \{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\}$ non è vuoto per alcun n, poichè X è infinito.

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.*

Sia X un insieme infinito e sia $\varphi : \mathcal{P}(X) \to X$ una funzione di scelta per X.
Definiamo una successione di elementi di X:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \varphi(X) \\
a_n &= \varphi(X \setminus \{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\})
\end{aligned}
$$

Gli a_n sono distinti. L'insieme $X \setminus \{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\}$ non è vuoto per alcun n, poichè X è infinito.

L'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è contenuto in X ed è numerabile.

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

Lo abbiamo già dimostrato per l'insieme dei numeri naturali.

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

Sia X un insieme infinito qualsiasi; per il teorema precedente possiamo scrivere $X = A \cup \overline{A}$ dove A è un sottoinsieme numerabile di X e $\overline{A}$ è il complementare di A in X.

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

Sia X un insieme infinito qualsiasi; per il teorema precedente possiamo scrivere $X = A \cup \overline{A}$ dove A è un sottoinsieme numerabile di X e $\overline{A}$ è il complementare di A in X.

Definiamo una funzione iniettiva $f : X \to X$, data

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

Sia X un insieme infinito qualsiasi; per il teorema precedente possiamo scrivere $X = A \cup \overline{A}$ dove A è un sottoinsieme numerabile di X e $\overline{A}$ è il complementare di A in X.

Definiamo una funzione iniettiva $f : X \to X$, data dall'identità su $\overline{A}$ e

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

Sia X un insieme infinito qualsiasi; per il teorema precedente possiamo scrivere $X = A \cup \overline{A}$ dove A è un sottoinsieme numerabile di X e $\overline{A}$ è il complementare di A in X.
Definiamo una funzione iniettiva $f : X \to X$, data dall'identità su $\overline{A}$ e che mandi A in una sua parte propria.

Insiemi infiniti

Teorema. *Ogni insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

Sia X un insieme infinito qualsiasi; per il teorema precedente possiamo scrivere $X = A \cup \overline{A}$ dove A è un sottoinsieme numerabile di X e $\overline{A}$ è il complementare di A in X.
Definiamo una funzione iniettiva $f : X \to X$, data dall'identità su $\overline{A}$ e che mandi A in una sua parte propria.

f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra X e una sua parte propria.

I razionali

I razionali

Un risultato sorprendente: i razionali sono numerabili!

I razionali

Un risultato sorprendente: i razionali sono numerabili!

Scriviamo i razionali positivi in questo modo

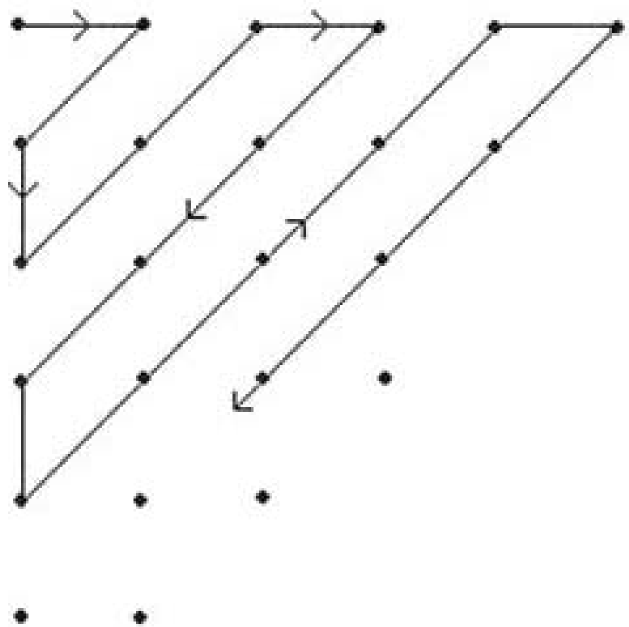
$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\
2 & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \dots \\
3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\
4 & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

I razionali

Un risultato sorprendente: i razionali sono numerabili!

Scriviamo i razionali positivi in questo modo e tracciamo una spezzata:

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$
2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\cdots$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$
4	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$



I razionali

La spezzata che abbiamo tracciato definisce un ordine:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & \longrightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \longrightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \longrightarrow & \frac{1}{6} & & \frac{1}{7} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
2 & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{6} & & \frac{2}{7} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
3 & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{6} & & \frac{3}{7} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
4 & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \frac{4}{6} & & \frac{4}{7} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & & \\
5 & & \frac{5}{2} & \longrightarrow & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \frac{5}{6} & & \frac{5}{7} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

I razionali

Percorrendo la spezzata tocchiamo tutti i numeri scritti, ottenendo la successione

$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots$$

I razionali

Percorrendo la spezzata tocchiamo tutti i numeri scritti, ottenendo la successione

$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Ora cancelliamo tutte le frazioni non ridotte ai minimi termini. Otterremo la successione:

$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots$$

I razionali

Percorrendo la spezzata tocchiamo tutti i numeri scritti, ottenendo la successione

$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Ora cancelliamo tutte le frazioni non ridotte ai minimi termini. Otterremo la successione:

$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots$$

in cui ogni razionale appare una e una sola volta:

abbiamo numerato i razionali positivi!

I razionali

Ora è sufficiente aggiungere, dopo ogni numero della successione appena costruita, il suo opposto e lo zero come primo termine: in questo modo si costruisce una successione che contiene tutti i razionali:

abbiamo numerato i razionali!

Intervalli reali

Dimostriamo che la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Intervalli reali

Dimostriamo che la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Consideriamo la funzione

$$\begin{gathered}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x)\end{gathered}$$

Essa è invertibile.

Intervalli reali

Dimostriamo che la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan(x) \end{aligned}$$

Essa è invertibile.

Allora l'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ha la stessa cardinalità della retta $\mathbb{R}$.

Intervalli reali

Dimostriamo che la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Un “cambio di variabile” dimostra che intervalli aperti e limitati sono equipotenti.

Intervalli reali

Dimostriamo che la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Un “cambio di variabile” dimostra che intervalli aperti e limitati sono equipotenti.

Dati gli intervalli (a, b) e (c, d), il cambio di variabile si ottiene con la funzione biiettiva

$$x \quad \mapsto \quad \frac{d-c}{b-a}\,x + \frac{bc-ad}{b-a}$$

Intervalli reali

Dimostriamo che la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Poichè la funzione esponenziale

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow (0, +\infty) \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

è biiettiva,

Intervalli reali

Dimostriamo che la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Poichè la funzione esponenziale

$$\begin{gathered}\mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty) \\ x \longmapsto e^x\end{gathered}$$

è biiettiva, la semiretta positiva ha la stessa cardinalità della retta.

Intervalli reali

Dimostriamo che la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Poichè la funzione esponenziale

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow (0, +\infty) \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

è biiettiva, la semiretta positiva ha la stessa cardinalità della retta.

Inoltre, con un cambio di variabile, di mostra che tutte le semirette sono equipotenti.

Intervalli reali

Abbiamo visto che:

Intervalli reali

Abbiamo visto che:

- $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$

Intervalli reali

Abbiamo visto che:

- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$
- intervalli aperti e limitati sono equipotenti

Intervalli reali

Abbiamo visto che:

- $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$
- intervalli aperti e limitati sono equipotenti
- le semirette sono equipotenti alla retta

Intervalli reali

Abbiamo visto che:

- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$
- intervalli aperti e limitati sono equipotenti
- le semirette sono equipotenti alla retta

Allora la retta reale è equipotente ad un qualunque intervallo aperto sulla retta.

Il teorema di Bernstein

Teorema. *Dati due insiemi* A *e* B*, se è* $\#A \leq \#B$ *e* $\#B \leq \#A$*, allora vale* $\#A = \#B$

Il teorema di Bernstein

Teorema. *Dati due insiemi A e B, se è $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, allora vale $\#A = \#B$*

Grazie a questo risultato, per dimostrare che due insiemi A e B sono equipotenti, si possono dare due funzioni iniettive, una da A in B, l'altra da B in A.

Il teorema di Bernstein

Teorema. *Dati due insiemi* A *e* B*, se è* $\#A \leq \#B$ *e* $\#B \leq \#A$*, allora vale* $\#A = \#B$

Grazie a questo risultato, per dimostrare che due insiemi A e B sono equipotenti, si possono dare due funzioni iniettive, una da A in B, l'altra da B in A.

Un esempio: la retta reale $\mathbb{R}$ è equipotente a un qualsiasi intervallo chiuso $[a, b]$.

Il teorema di Bernstein

Teorema. *Dati due insiemi A e B, se è $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, allora vale $\#A = \#B$*

Grazie a questo risultato, per dimostrare che due insiemi A e B sono equipotenti, si possono dare due funzioni iniettive, una da A in B, l'altra da B in A.

Un esempio: la retta reale $\mathbb{R}$ è equipotente a un qualsiasi intervallo chiuso $[a, b]$.
Una funzione iniettiva di $[-\pi, \pi]$ in $\mathbb{R}$ è l'inclusione,

Il teorema di Bernstein

Teorema. *Dati due insiemi A e B, se è $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, allora vale $\#A = \#B$*

Grazie a questo risultato, per dimostrare che due insiemi A e B sono equipotenti, si possono dare due funzioni iniettive, una da A in B, l'altra da B in A.

Un esempio: la retta reale $\mathbb{R}$ è equipotente a un qualsiasi intervallo chiuso $[a, b]$.
Una funzione iniettiva di $[-\pi, \pi]$ in $\mathbb{R}$ è l'inclusione, mentre una funzione iniettiva di $\mathbb{R}$ in $[-\pi, \pi]$ è $x \mapsto \arctan x$.

Il teorema di Bernstein

Teorema. *Dati due insiemi A e B, se è $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, allora vale $\#A = \#B$*

Grazie a questo risultato, per dimostrare che due insiemi A e B sono equipotenti, si possono dare due funzioni iniettive, una da A in B, l'altra da B in A.

Un esempio: la retta reale $\mathbb{R}$ è equipotente a un qualsiasi intervallo chiuso $[a, b]$.
Una funzione iniettiva di $[-\pi, \pi]$ in $\mathbb{R}$ è l'inclusione, mentre una funzione iniettiva di $\mathbb{R}$ in $[-\pi, \pi]$ è $x \mapsto \arctan x$.
Con il solito cambio di variabile, si dimostra che tutti gli intervalli chiusi hanno la stessa cardinalità.

Non numerabilità dei reali

Teorema. $\mathbb{R}$, *l'insieme dei numeri reali, è non numerabile.*

Non numerabilità dei reali

Teorema. $\mathbb{R}$, *l'insieme dei numeri reali, è non numerabile.*

Vediamo la dimostrazione data da Cantor

Non numerabilità dei reali

Teorema. $\mathbb{R}$, *l'insieme dei numeri reali, è non numerabile.*

Scriviamo i numeri reali che terminano con un infinito numero di cifre 9 in modo che terminino con infiniti 0. Ad esempio invece di $0,0\overline{9}$ scriviamo $0,1$.

Non numerabilità dei reali

Teorema. $\mathbb{R}$, *l'insieme dei numeri reali, è non numerabile.*

Scriviamo i numeri reali che terminano con un infinito numero di cifre 9 in modo che terminino con infiniti 0. Ad esempio invece di $0,0\overline{9}$ scriviamo $0,1$.

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}$ sia numerabile.

Non numerabilità dei reali

Teorema. $\mathbb{R}$, *l'insieme dei numeri reali, è non numerabile.*

Scriviamo i numeri reali che terminano con un infinito numero di cifre 9 in modo che terminino con infiniti 0. Ad esempio invece di $0,0\overline{9}$ scriviamo $0,1$.

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}$ sia numerabile. Allora possiamo costruire una funzione biiettiva

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

e dunque una funzione suriettiva

$$\mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$$

Non numerabilità dei reali

Avremo un “elenco”, ovvero una successione che contiene tutti i reali tra 0 e 1:

$$
\begin{array}{ccl}
0 & \leftrightarrow & 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \\
1 & \leftrightarrow & 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots \\
2 & \leftrightarrow & 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots \\
3 & \leftrightarrow & 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Non numerabilità dei reali

Avremo un "elenco", ovvero una successione che contiene tutti i reali tra 0 e 1:

$$
\begin{array}{ccl}
0 & \leftrightarrow & 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \\
1 & \leftrightarrow & 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots \\
2 & \leftrightarrow & 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots \\
3 & \leftrightarrow & 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Ora cerchiamo un numero compreso tra 0 e 1 che non faccia parte dell'elenco.

Non numerabilità dei reali

Sia $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 ...$ dove

Non numerabilità dei reali

Sia $\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4...$ dove ogni cifra $\alpha_k \neq 9$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

Non numerabilità dei reali

Sia $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4...$ dove ogni cifra $\alpha_k \neq 9$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

$$\alpha_1 \neq a_1$$

Non numerabilità dei reali

Sia $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 ...$ dove ogni cifra $\alpha_k \neq 9$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

$$\alpha_1 \neq a_1$$
$$\alpha_2 \neq b_2$$

Non numerabilità dei reali

Sia $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4...$ dove ogni cifra $\alpha_k \neq 9$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

$$\alpha_1 \neq a_1$$
$$\alpha_2 \neq b_2$$
$$\dots$$

Non numerabilità dei reali

Sia $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4...$ dove ogni cifra $\alpha_k \neq 9$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

$\alpha_1 \neq a_1$

$\alpha_2 \neq b_2$

$\ldots$

α_k è diversa dalla k-esima cifra del k-esimo numero

Non numerabilità dei reali

Sia $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4...$ dove ogni cifra $\alpha_k \neq 9$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

$\alpha_1 \neq a_1$

$\alpha_2 \neq b_2$

$\dots$

α_k è diversa dalla k-esima cifra del k-esimo numero

Il numero così costruito differisce da ogni numero nell'elenco per almeno una cifra.

Non numerabilità dei reali

Sia $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$... dove
ogni cifra $\alpha_k \neq 9$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

$\alpha_1 \neq a_1$

$\alpha_2 \neq b_2$

$\dots$

α_k è diversa dalla k-esima cifra del k-esimo numero

Il numero così costruito differisce da ogni numero nell'elenco per almeno una cifra.

Allora la funzione che supponevamo suriettiva non lo è, dunque $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Cardinalità maggiori

A questo punto potremmo chiederci se esistano insiemi infiniti con cardinalità diverse dai numerabili e dai reali.

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme* X*, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme X, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

L'applicazione $X \to \mathcal{P}(X)$ data da $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva,

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme* X, *ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

L'applicazione $X \to \mathcal{P}(X)$ data da $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva, dunque $\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$.

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme X, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

L'applicazione $X \to \mathcal{P}(X)$ data da $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva, dunque $\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$.

Ora è sufficiente dimostrare che

$$\#X \neq \#\mathcal{P}(X)$$

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme* X*, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

L'applicazione $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ data da $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva, dunque $\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$.

Ora è sufficiente dimostrare che

$$\#X \neq \#\mathcal{P}(X)$$

Per fare questo, mostreremo che non esistono applicazioni suriettive $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme X, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \to \mathcal{P}(X)$.

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme X, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \to \mathcal{P}(X)$.
Ciò è evidente se X è vuoto.

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme* X*, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
Sia X non vuoto; sia ϕ un'applicazione $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme X, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \to \mathcal{P}(X)$.
Sia X non vuoto; sia ϕ un'applicazione $X \to \mathcal{P}(X)$.
Consideriamo il sottoinsieme di X:

$$H := \{x : x \in X \text{ e } x \notin \phi(x)\}.$$

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme* X, *ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \to \mathcal{P}(X)$.
Sia X non vuoto; sia ϕ un'applicazione $X \to \mathcal{P}(X)$.
Consideriamo il sottoinsieme di X:

$$H := \{x : x \in X \text{ e } x \notin \phi(x)\}.$$

Affermo che H differisce da ciascuno degli insiemi $\phi(x)$:

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme X, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \to \mathcal{P}(X)$.
Sia X non vuoto; sia ϕ un'applicazione $X \to \mathcal{P}(X)$.
Consideriamo il sottoinsieme di X:

$$H := \{x : x \in X \text{ e } x \notin \phi(x)\} .$$

Affermo che H differisce da ciascuno degli insiemi $\phi(x)$:
preso un $\overline{x} \in X$, se è $\overline{x} \in \phi(\overline{x})$

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme X, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
Sia X non vuoto; sia ϕ un'applicazione $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
Consideriamo il sottoinsieme di X:

$$H := \{x : x \in X \text{ e } x \notin \phi(x)\}.$$

Affermo che H differisce da ciascuno degli insiemi $\phi(x)$:
preso un $\overline{x} \in X$, se è $\overline{x} \in \phi(\overline{x})$ allora $\overline{x} \notin H$ e

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme X, ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \to \mathcal{P}(X)$.
Sia X non vuoto; sia ϕ un'applicazione $X \to \mathcal{P}(X)$.
Consideriamo il sottoinsieme di X:

$$H := \{x : x \in X \text{ e } x \notin \phi(x)\} .$$

Affermo che H differisce da ciascuno degli insiemi $\phi(x)$:
preso un $\overline{x} \in X$, se è $\overline{x} \in \phi(\overline{x})$ allora $\overline{x} \notin H$ e viceversa, se $\overline{x} \in H$

Cardinalità maggiori

Teorema. *Per ogni insieme* X, *ne esiste uno di cardinalità maggiore:* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Vogliamo dimostrare che non esistono applicazioni suriettive $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
Sia X non vuoto; sia ϕ un'applicazione $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
Consideriamo il sottoinsieme di X:

$$H := \{x : x \in X \text{ e } x \notin \phi(x)\} .$$

Affermo che H differisce da ciascuno degli insiemi $\phi(x)$:
preso un $\overline{x} \in X$, se è $\overline{x} \in \phi(\overline{x})$ allora $\overline{x} \notin H$ e viceversa, se $\overline{x} \in H$ allora $\overline{x} \notin \phi(\overline{x})$.

Insieme di Cantor

Prendiamo l'intervallo $[0, 1]$ e dividiamolo in tre sottointervalli uguali mediante i punti $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Insieme di Cantor

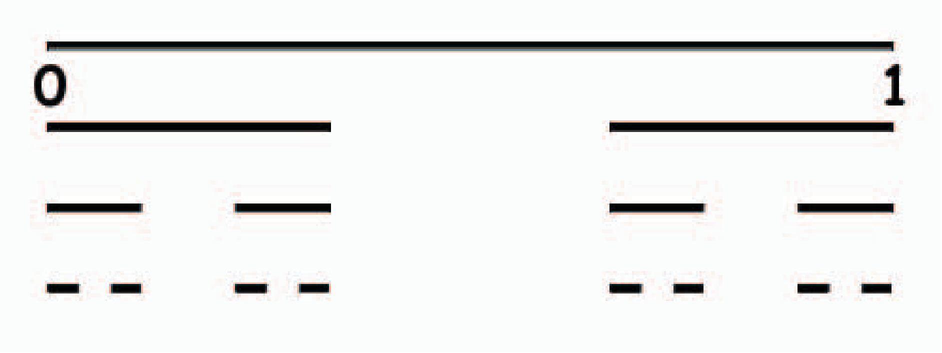
Prendiamo l'intervallo $[0, 1]$ e dividiamolo in tre sottointervalli uguali mediante i punti $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.
Cancelliamo l'intervallo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Insieme di Cantor

Prendiamo l'intervallo $[0, 1]$ e dividiamolo in tre sottointervalli uguali mediante i punti $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.
Cancelliamo l'intervallo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
Ora consideriamo ciascuno dei due intervalli $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ e dividiamoli ciascuno in tre sottointervalli uguali, quindi cancelliamo il sottointervallo centrale.

Insieme di Cantor

Prendiamo l'intervallo $[0, 1]$ e dividiamolo in tre sottointervalli uguali mediante i punti $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.
Cancelliamo l'intervallo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
Ora consideriamo ciascuno dei due intervalli $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ e dividiamoli ciascuno in tre sottointervalli uguali, quindi cancelliamo il sottointervallo centrale.
Iterando il procedimento all'infinito, otteniamo l'insieme di Cantor, che viene denotato con C.



Insieme di Cantor

Alcune proprietà di questo insieme:

Insieme di Cantor

Alcune proprietà di questo insieme:

- non è vuoto: infatti alcuni punti non vengono mai cancellati; ad esempio, restano 0, 1, $\frac{1}{3}$, $\ldots$

Insieme di Cantor

Alcune proprietà di questo insieme:

- non è vuoto: infatti alcuni punti non vengono mai cancellati; ad esempio, restano 0, 1, $\frac{1}{3}$, $\ldots$
- è limitato, poichè è contenuto nell'intervallo $[0, 1]$

Insieme di Cantor

Alcune proprietà di questo insieme:

- non è vuoto: infatti alcuni punti non vengono mai cancellati; ad esempio, restano 0, 1, $\frac{1}{3}$, $\ldots$
- è limitato, poichè è contenuto nell'intervallo $[0, 1]$
- è chiuso, perchè complementare di unione di aperti (gli intervalli che vengono "cancellati" nella costruzione)

Insieme di Cantor

Alcune proprietà di questo insieme:

- non è vuoto: infatti alcuni punti non vengono mai cancellati; ad esempio, restano $0, 1, \frac{1}{3}, \ldots$
- è limitato, poichè è contenuto nell'intervallo $[0, 1]$
- è chiuso, perchè complementare di unione di aperti (gli intervalli che vengono "cancellati" nella costruzione)
- dunque è compatto

Insieme di Cantor

Alcune proprietà di questo insieme:

- non è vuoto: infatti alcuni punti non vengono mai cancellati; ad esempio, restano 0, 1, $\frac{1}{3}$, $\ldots$
- è limitato, poichè è contenuto nell'intervallo $[0, 1]$
- è chiuso, perchè complementare di unione di aperti (gli intervalli che vengono "cancellati" nella costruzione)
- dunque è compatto
- non contiene intervalli, ma solo punti isolati, ovvero è totalmente sconnesso

Insieme di Cantor

Valutiamo la sua misura di Lebesgue.

Insieme di Cantor

Valutiamo la sua misura di Lebesgue.

Nei successivi passaggi della costruzione, si toglie prima un intervallo lungo $\frac{1}{3}$, poi due intervalli lunghi $\frac{1}{9}$, quindi quattro intervalli lunghi $\frac{1}{27}$, e così via.

Insieme di Cantor

Valutiamo la sua misura di Lebesgue.

Nei successivi passaggi della costruzione, si toglie prima un intervallo lungo $\frac{1}{3}$, poi due intervalli lunghi $\frac{1}{9}$, quindi quattro intervalli lunghi $\frac{1}{27}$, e così via.

Dunque in totale si tolgono degli intervalli aperti per una lunghezza di

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{3^{i+1}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

Insieme di Cantor

Valutiamo la sua misura di Lebesgue.

Nei successivi passaggi della costruzione, si toglie prima un intervallo lungo $\frac{1}{3}$, poi due intervalli lunghi $\frac{1}{9}$, quindi quattro intervalli lunghi $\frac{1}{27}$, e così via.

Dunque in totale si tolgono degli intervalli aperti per una lunghezza di

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{3^{i+1}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Allora ciò che resta ha misura nulla!

Insieme di Cantor

Nonostante C abbia misura nulla, vale $\#C = \#\mathbb{R}$.

Insieme di Cantor

Nonostante C abbia misura nulla, vale $\#C = \#\mathbb{R}$.

Ovviamente, si ha $\#C \leq \#\mathbb{R}$, perchè $C \subset \mathbb{R}$.

Insieme di Cantor

Nonostante C abbia misura nulla, vale $\#C = \#\mathbb{R}$.

Ovviamente, si ha $\#C \leq \#\mathbb{R}$, perchè $C \subset \mathbb{R}$.

Prendiamo un punto dell'insieme C e scriviamolo come un numero reale $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$, dove c_n vale

Insieme di Cantor

Nonostante C abbia misura nulla, vale $\#C = \#\mathbb{R}$.

Ovviamente, si ha $\#C \leq \#\mathbb{R}$, perchè $C \subset \mathbb{R}$.

Prendiamo un punto dell'insieme C e scriviamolo come un numero reale $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$, dove c_n vale

- 0 se il punto è nell'intervallo a sinistra nell'n-esima suddivisione,

Insieme di Cantor

Nonostante C abbia misura nulla, vale $\#C = \#\mathbb{R}$.

Ovviamente, si ha $\#C \leq \#\mathbb{R}$, perchè $C \subset \mathbb{R}$.

Prendiamo un punto dell'insieme C e scriviamolo come un numero reale $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$, dove c_n vale

- 0 se il punto è nell'intervallo a sinistra nell'n-esima suddivisione,
- 2 se il punto è nell'intervallo a destra nell'n-esima suddivisione.

Insieme di Cantor

Nonostante C abbia misura nulla, vale $\#C = \#\mathbb{R}$.

Ovviamente, si ha $\#C \leq \#\mathbb{R}$, perchè $C \subset \mathbb{R}$.

Prendiamo un punto dell'insieme C e scriviamolo come un numero reale $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$, dove c_n vale

- 0 se il punto è nell'intervallo a sinistra nell'n-esima suddivisione,
- 2 se il punto è nell'intervallo a destra nell'n-esima suddivisione.

Scriviamo così, in base 3, i numeri reali associati ai punti dell'insieme di Cantor.

Insieme di Cantor

Nessuno dei punti di C scritti in questo modo può contenere la cifra 1, a meno che non sia l'ultima cifra del numero.

Insieme di Cantor

Nessuno dei punti di C scritti in questo modo può contenere la cifra 1, a meno che non sia l'ultima cifra del numero.

Infatti nessun punto può essere nell'intervallo centrale, che viene di volta in volta cancellato, però può trovarsi negli estremi dell'intervallo.

Insieme di Cantor

Nessuno dei punti di C scritti in questo modo può contenere la cifra 1, a meno che non sia l'ultima cifra del numero.

Infatti nessun punto può essere nell'intervallo centrale, che viene di volta in volta cancellato, però può trovarsi negli estremi dell'intervallo.

Ad esempio $0,1$ appartiene a C perchè $0,1 = 0,0222222\ldots$.

Insieme di Cantor

Nessuno dei punti di C scritti in questo modo può contenere la cifra 1, a meno che non sia l'ultima cifra del numero.

Infatti nessun punto può essere nell'intervallo centrale, che viene di volta in volta cancellato, però può trovarsi negli estremi dell'intervallo.

Ad esempio $0,1$ appartiene a C perchè $0,1 = 0,0222222\ldots$.

Invece $0,12$ non può appartenere a C.

Insieme di Cantor

Cerchiamo una funzione iniettiva $f : (0,1) \to C$.

Insieme di Cantor

Cerchiamo una funzione iniettiva $f : (0,1) \longrightarrow C$.
Scriviamo i numeri reali nell'intervallo $(0,1)$ in base binaria.

Insieme di Cantor

Cerchiamo una funzione iniettiva $f : (0,1) \to C$. Scriviamo i numeri reali nell'intervallo $(0,1)$ in base binaria. Ovviamente non consideriamo le scritture di numeri che terminano con infinite cifre 1.

Insieme di Cantor

Cerchiamo una funzione iniettiva $f : (0,1) \to C$.
Scriviamo i numeri reali nell'intervallo $(0,1)$ in base binaria. Ovviamente non consideriamo le scritture di numeri che terminano con infinite cifre 1.
Per ogni numero $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, sia $f(b) = a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } b_n = 0 \\ 2 & \text{se } b_n = 1 \end{cases}$$

Insieme di Cantor

Cerchiamo una funzione iniettiva $f : (0,1) \to C$.
Scriviamo i numeri reali nell'intervallo $(0,1)$ in base binaria. Ovviamente non consideriamo le scritture di numeri che terminano con infinite cifre 1.
Per ogni numero $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, sia $f(b) = a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } b_n = 0 \\ 2 & \text{se } b_n = 1 \end{cases}$$

Allora $f(b)$ è un punto dell'insieme di Cantor.

Insieme di Cantor

Cerchiamo una funzione iniettiva $f : (0,1) \to C$.
Scriviamo i numeri reali nell'intervallo $(0,1)$ in base binaria. Ovviamente non consideriamo le scritture di numeri che terminano con infinite cifre 1.
Per ogni numero $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, sia
$f(b) = a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } b_n = 0 \\ 2 & \text{se } b_n = 1 \end{cases}$$

Allora $f(b)$ è un punto dell'insieme di Cantor.
f è iniettiva, dunque $\#C \geq \#(0,1) = \#\mathbb{R}$.

Insieme di Cantor

Cerchiamo una funzione iniettiva $f : (0,1) \to C$.
Scriviamo i numeri reali nell'intervallo $(0,1)$ in base binaria. Ovviamente non consideriamo le scritture di numeri che terminano con infinite cifre 1.
Per ogni numero $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$, sia
$f(b) = a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } b_n = 0 \\ 2 & \text{se } b_n = 1 \end{cases}$$

Allora $f(b)$ è un punto dell'insieme di Cantor.
f è iniettiva, dunque $\#C \geq \#(0,1) = \#\mathbb{R}$.

Allora, per il teorema di Bernstein, $\#C = \#\mathbb{R}$.