1° relazione Analisi Numerica 1ud

Ester Dalvit, 102233

1. La matrice dei coefficienti del sistema (1) è triangolare inferiore; è non singolare poichè nessun elemento della diagonale principale è nullo; dunque ha una e una sola soluzione. La soluzione, ottenuta con il metodo di risoluzione dei sistemi lineari triangolari inferiori, è

   $$(1, -1, 0, 1, -1)$$

   Il condizionamento della matrice vale circa 8, dunque essa è ben condizionata. Il residuo è nullo, pertanto la soluzione è esatta. Infatti

   $$\frac{\|x - \overline{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq K(A) \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0$$

   dove con x si indica la soluzione reale, con $\overline{x}$ la soluzione trovata dal calcolatore, con $K(A)$ il condizionamento della matrice, con b il vettore dei termini noti e con r il residuo.

2. La matrice dei coefficienti del sistema (2) è tridiagonale a diagonale dominante. Esso ammette una e una sola soluzione, in quanto:

   $$| a_{ii} | > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} | a_{ij} | \qquad i = 1, \ldots, 4$$

   La soluzione data dal calcolatore è

   $$(1, 0.9999999, 1, 1)$$

   Dunque possiamo assumere che $(1, 1, 1, 1)$ sia una soluzione che meglio approssima quella reale.

   Il condizionamento della matrice vale circa 5.87, quindi essa è ben condizionata. La norma del residuo, calcolata con la soluzione trovata dal calcolatore, è dell'ordine di 10^{-8}, mentre, calcolata con la soluzione $(1, 1, 1, 1)$, è nulla. La prima soluzione è quindi attendibile, cioè è molto vicina a quella esatta; la seconda soluzione è quella esatta.

3. La matrice dei coefficienti del sistema (3) è tridiagonale e simmetrica. Cercando di risolvere il sistema, il metodo per i sistemi tridiagonali fallisce. Anche con il metodo di Gauss non si ottiene nulla.

   Dunque la matrice è singolare, ovvero il sistema non ha un'unica soluzione.

4. La matrice dei coefficienti del sistema (4) non ha alcuna particolare struttura: il sistema si risolve con il metodo di Gauss. Esso, se applicato senza pivoting, fallisce. Infatti, applicando il metodo alla matrice, dopo il primo passo si ottiene:

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

   E quindi:

$$\mathcal{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   Dunque si trova che l'elemento a''_{33} vale 0 e l'algoritmo si ferma poichè prevede la divisione per a''_{33}.

   Usando il pivoting, invece, tale problema viene eliminato scambiando le righe. La soluzione risulta

$$(1, 0.9999998, 1, 1)$$

   dunque si può assumere che una soluzione più vicina a quella reale sia $(1, 1, 1, 1)$.

   Il condizionamento della matrice vale circa 62.2, dunque essa è al limite tra ben condizionata o meno, poichè è una matrice 4×4. La norma del residuo, divisa per la norma del vettore dei termini noti, vale circa 1.19×10^{-7}, dunque

$$\frac{\|x - \overline{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 62.2 * 1.19 \times 10^{-7} = 7.4 \times 10^{-6}$$

   dove con x si indica la soluzione reale e con $\overline{x}$ la soluzione trovata dal calcolatore.

La soluzione trovata dal calcolatore è pertanto attendibile, perchè non si discosta molto da quella reale. Usando la soluzione $(1, 1, 1, 1)$ il residuo risulta nullo, quindi questa è la soluzione esatta.

5. La matrice dei coefficienti del sistema (5) è simmetrica; è una matrice di Hilbert, cioè

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad b_i = \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{i+j-1} \qquad i, j = 1, \ldots, 8$$

dove con h_{ij} si indica l'elemento della matrice di riga i e colonna j e con b_i l'elemento i-esimo del termine noto. Si vede subito che la soluzione esatta è $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Usando 7 cifre decimali, applicando il metodo di Gauss senza pivoting, si ottiene la seguente soluzione.

(0.9984117, 1.058476, 0.5004613, 2.584622,
-0.8452467, 0.7976678, 2.817706, 0.086453490)

Il condizionamento della matrice è circa 3.3×10^9, dunque essa, essendo una matrice 8×8, è mal condizionata.
La norma del residuo vale circa 4.38×10^{-8}, dunque si ottiene

$$\frac{\|x - \overline{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 3.3 \times 10^9 * 4.38 \times 10^{-8} \approx 140$$

Applicando il metodo di Gauss con pivoting si ottengono i seguenti risultati.

(0.9981413, 1.067952, 0.4234891, 2.810456,
-1.051097, 0.6302307, 3.205992, -0.086841330)

La norma del residuo vale circa 8.77×10^{-8}.

$$\frac{\|x - \overline{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 3.3 \times 10^9 * 8.77 \times 10^{-8} \approx 290$$

Dunque le soluzioni così trovate non sono attendibili, perchè possono discostarsi di un fattore molto grande dalla soluzione reale.
Nonostante il pivoting garantisca una maggiore accuratezza della soluzione, si vede che in questo caso il metodo di Gauss senza pivoting ha dato una soluzione più vicina a quella esatta. Questo avviene perchè in realtà la soluzione calcolata non è quella della matrice di Hilbert, ma di

una simile, poichè nell'inserimento dei dati si commettono inevitabili errori di arrotondamento.

Poichè le soluzioni trovate non sono attendibili, esse sono state ricalcolate con la doppia precisione, cioè con un numero doppio di cifre decimali.

Applicando il metodo di Gauss senza pivoting, si ottiene la soluzione

$$(1.00000000001271, 0.999999999659026, 1.00000000183864, \\ 0.999999999374661, 0.999999983915114, 1.00000004145706, \\ 0.999999960230950, 1.00000001351998)$$

La norma del residuo vale circa 1.47×10^{-15}, dunque si ottiene

$$\frac{\|x - \overline{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 3.3 \times 10^9 * 1.47 \times 10^{-15} \approx 4.9 \times 10^{-6}$$

Dunque la soluzione trovata è attendibile.

Applicando il metodo di Gauss con pivoting si ha una soluzione molto simile:

$$(1.00000000001279, 0.999999999652596, 1.00000000193617, \\ 0.999999998808483, 0.999999985494158, 1.00000003918318, \\ 0.999999961861739, 1.00000001305894)$$

La norma del residuo vale circa 8.17×10^{-16}, dunque si ha

$$\frac{\|x - \overline{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 3.3 \times 10^9 * 8.17 \times 10^{-16} \approx 2.7 \times 10^{-6}$$

La soluzione è ancora attendibile; applicando il pivoting non si ottiene un significativo guadagno di precisione.