1° relazione di analisi numerica 2° UD

22 ottobre 2004

Ester Dalvit, matr. 102233

È dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione analitica è

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Si richiede di studiare la stabilità e la positività della soluzione numerica al variare del passo di discretizzazione h dei metodi di Runge Kutta di ordine 1, 2, 3, 4 e di Eulero implicito applicati al problema.

Sarà sufficiente trovare un'approssimazione $\overline{h}$ alla seconda cifra decimale del passo di discretizzazione, in modo che per ogni $h < \overline{h}$ la soluzione numerica sia stabile e positiva. Ciò significa che la soluzione discreta trovata dovrà essere limitata inferiormente da 0 e superiormente da una costante; in questo caso particolare la costante ottimale sarebbe 1, perchè la soluzione analitica ha un massimo in 0 che vale 1 ed è sempre decrescente.

Consideriamo dapprima i **metodi di Runge Kutta**, per i quali si procede in modo analogo al variare dell'ordine. Questi metodi usano la differenza finita in avanti per approssimare le derivate.

Avendo a disposizione un implementazione del metodo di Runge Kutta per i primi quattro ordini, si procede in questo modo: fissato l'estremo sinistro $a = 0$ dell'intervallo su cui vogliamo trovare la soluzione numerica e il numero di nodi $n = 100$ che vogliamo nell'insieme discreto in cui calcoleremo la soluzione, variamo l'estremo destro L dell'intervallo, in modo da ricavare diversi valori di h, secondo la relazione

$$h = \frac{L-a}{n} = \frac{L}{n}$$

La nostra implementazione stampa su file le coordinate (x_i, y_i) di ogni punto della soluzione numerica. Sarà sufficiente controllare che la seconda coordinata sia positiva per ogni valore di x_i, e che la soluzione sia stabile; quest'ultimo controllo si può fare facilmente guardando il grafico della funzione discreta oppure l'errore, che deve essere finito.

I problemi di instabilità e non positività si hanno per h grandi, mentre per h sufficientemente piccolo tutti i metodi danno una soluzione con le caratteristiche richieste.

Si procede così: partendo da $L = 100$, dunque $h = 1$, si aumenta L se la soluzione trovata è stabile e positiva; si diminuisce L in caso contrario. Conoscendo un passo h che genera stabilità e uno che genera instabilità, il passo successivo viene scelto circa a metà tra i due precedenti valori.

Le seguenti tabelle mostrano i risultati ottenuti con i quattro metodi.

L	h	Errore	Risultato
100	1.00	*floating overflow*	
50	0.50	0.2000000	stabile e positivo
75	0.75	*floating overflow*	
65	0.65	0.2970123	stabile e positivo
70	0.70	0.3288591	stabile e positivo
71	0.71	*floating overflow*	

Tabella 1: Stabilità e positività - Metodo di Runge Kutta di ordine 1

L	h	Errore	Risultato
100	1	0.5000000	soluzione nulla
99	0.99	0.4851250	stabile e positivo
101	1.01	*floating overflow*	

Tabella 2: Stabilità e positività - Metodo di Runge Kutta di ordine 2

L	h	Errore	Risultato
100	1	*floating overflow*	
60	0.60	1.0689855E-02	stabile e positivo
80	0.80	6.2551260E-02	stabile e positivo
90	0.90	0.1157379	stabile e positivo
95	0.95	0.1506780	stabile e positivo
98	0.98	0.1952654	stabile e positivo
99	0.99	*floating overflow*	

Tabella 3: Stabilità e positività - Metodo di Runge Kutta di ordine 3

L	h	Errore	Risultato
100	1.00	0.1041667	stabile e positivo
150	1.50	*floating overflow*	
120	1.20	0.3052058	stabile e positivo
130	1.30	*floating overflow*	
125	1.25	0.3818614	stabile e positivo
126	1.26	*floating overflow*	

Tabella 4: Stabilità e positività - Metodo di Runge Kutta di ordine 4

Dove il risultato è stato *floating overflow*, la macchina non è riuscita a terminare i calcoli, poichè la soluzione esplodeva, uscendo dal range di numeri rappresentabili, andando cioè all'infinito. In questi casi la soluzione è ovviamente instabile, perciò non accettabile.

L'errore indica il massimo errore nei nodi; quando l'errore è finito, la soluzione è stabile.

Usando il metodo di ordine 2 con un passo $h = 1$, si ottiene una soluzione nulla, che è stabile, però non rispetta il segno della soluzione analitica.

Riassumiamo i valori di h trovati.

Ordine	h limite
1	0.70
2	0.99
3	0.98
4	1.25

Tabella 5: Stabilità e positività - Metodi di Runge Kutta

Da questi risultati si può notare come il passo h debba essere più piccolo nei metodi di ordine più basso per avere una soluzione apprezzabile.

Nel *grafico 1* si può vedere l'andamento della soluzone numerica usando il metodo di ordine 2 al variare del passo di discretizzazione h:
per $h = 1.01$ la soluzione è negativa e tende a $-\infty$
per $h = 1.00$ si ha una soluzione nulla
per $h = 0.99$ la soluzione è stabile e positiva.

Consideriamo ora il metodo di **Eulero implicito o all'indietro**, che usa la differenza finita all'indietro per approssimare le derivate.

Sappiamo dallo studio teorico che questo metodo è incondizionatamente stabile, ma nel caso generale è necessario risolvere un'equazione non lineare per trovare ogni y_i. Per questo la nostra implementazione del metodo di Eulero implicito dovrà usare il metodo di Newton.

Vediamo i risultati ottenuti, ponendo $n = 10$, cioè suddividendo l'intervallo in 10 sottointervalli.

L	h	Errore	Risultato
10	1	4.9999997E-02	stabile e positivo
100	10	5.8353867E-02	stabile e positivo
1000	100	6.9562653E-03	stabile e positivo
10000	1000	1.1402969E-03	stabile e positivo
100000	10000	9.7825588E-04	stabile e positivo
1000000	100000	9.7657985E-04	stabile e positivo

Tabella 6: Stabilità e positività - Metodo di Eulero implicito

Notiamo che il metodo dà una soluzione sempre stabile e positiva, proprio come ci aspettavamo.

La soluzione trovata fino a $h = 100000$ è sempre accurata; questa qualità si paga con il maggior tempo impiegato dovuto alla maggior quantità di calcoli necessari.

Fissato l'intervallo $[0, 10]$*, studiare la convergenza degli stessi metodi, al variare di* n*.*

Consideriamo dapprima i **metodi di Runge Kutta**.

Modifichiamo la nostra implementazione dei metodi introducendo un ciclo con indice i. Ad ogni iterazione poniamo $n = 2^i$, svolgiamo i calcoli ed incrementiamo i di un'unità.

Sia $\overline{h}$ il passo limite, come definito nella prima parte: per $h < \overline{h}$ si ha stabilità e positività. Poichè queste qualità sono da ricercare anche ora, deve essere

$$\overline{h} > h = \frac{L}{n} = \frac{10}{2^i}$$

Dunque l'indice i avrà diversi valori iniziali: si trova che per i metodi di ordine 1, 2 e 3 deve essere $i \geq 4$, mentre per il metodo di ordine 4 $i \geq 3$.

Interrompiamo il ciclo dopo che l'errore è ricominciato a salire. Infatti l'errore dovrebbe tendere a zero al crescere di n, ma non sarà così, a causa degli inevitabili errori di arrotondamento. Se usassimo la doppia precisione, ci accorgeremmo che l'errore minimo si ha per un n più grande rispetto a quello trovato con la precisione semplice.

Nelle tabelle delle pagine seguenti è riportato l'errore per ogni valore di n per i metodi dei vari ordini.

Con il metodo di ordine 1, si può notare che $n = 2^{18}$ dà il minimo errore, mentre per n più grandi l'errore torna a crescere. Anche con n piccoli la soluzione è abbastanza accurata: il *grafico 2* riporta le soluzioni per $n = 2^4, 2^5, 2^6$, che si avvicinano sempre più alla soluzione esatta.

Con il metodo di ordine 2, la migliore approssimazione della soluzione si ottiene con $n = 2^{12}$. Dal *grafico 3* si può notare come la soluzione diventi molto accurata già con $n = 2^6$, mentre con $n = 2^4$ si nota di più l'errore.

Con il metodo di ordine 3 l'errore minore si ha per $n = 2^9$ e $n = 2^{10}$. Il *grafico 4* riporta le soluzioni date da $n = 2^4$ e $n = 2^5$, che sono già accurate.

Con il metodo di ordine 4 l'errore minimo si ha quando $n = 2^8$. Nel *grafico 5* si possono vedere le soluzioni date da $n = 2^3, 2^4, 2^5$.

Vediamo quindi che con i metodi di ordine maggiore, la convergenza si ottiene più velocemente, con n più piccoli; infatti l'errore va a zero più rapidamente. Nello stesso modo, però, l'errore ricomincia a crescere più rapidamente.

Dallo studio teorico sappiamo che usando il metodo di ordine 1 l'errore va a zero linearmente rispetto a h cioè a $\frac{1}{n}$, con quello di ordine 2 in modo quadratico, e così via. Ciò è dovuto all'ordine al quale ci si ferma nello sviluppo di Taylor della soluzione.

i	n	Errore
4	16	0.2808989
5	32	8.8967979E-02
6	64	4.2963684E-02
7	128	2.0102620E-02
8	256	9.6899867E-03
9	512	4.7605038E-03
10	1024	2.3589134E-03
11	2048	1.1740923E-03
12	4096	5.8525801E-04
13	8192	2.9230118E-04
14	16384	1.4692545E-04
15	32768	7.4028969E-05
16	65536	3.7193298E-05
17	131072	2.0682812E-05
18	262144	1.1622906E-05
19	524288	3.2424927E-05
20	1048576	8.9347363E-05

Tabella 7: Studio della convergenza - Metodo di Runge Kutta di ordine 1

i	n	Errore
4	16	0.1097261
5	32	9.8688900E-03
6	64	2.5191903E-03
7	128	6.2510371E-04
8	256	1.5550852E-04
9	512	3.8713217E-05
10	1024	9.7453594E-06
11	2048	2.5629997E-06
12	4096	5.0663948E-07
13	8192	5.3644180E-07

Tabella 8: Studio della convergenza - Metodo di Runge Kutta di ordine 2

i	n	Errore
4	16	1.4133751E-02
5	32	1.2755990E-03
6	64	1.2183189E-04
7	128	1.3113022E-05
8	256	1.6093254E-06
9	512	1.7881393E-07
10	1024	1.7881393E-07
11	2048	2.9802322E-07

Tabella 9: Studio della convergenza - Metodo di Runge Kutta di ordine 3

i	n	Errore
3	8	0.3818614
4	16	6.2916875E-03
5	32	1.3953447E-04
6	64	5.8412552E-06
7	128	4.1723251E-07
8	256	5.9604645E-08
9	512	1.4901161E-07
10	1024	1.7881393E-07
11	2048	2.9802322E-07
12	4096	4.1723251E-07

Tabella 10: Studio della convergenza - Metodo di Runge Kutta di ordine 4

Notiamo anche che i metodi di ordine maggiore, oltre a convergere più rapidamente, danno un errore notevolmente minore: con il metodo di ordine 1, l'errore minimo è dell'ordine di 10^{-5}, mentre con il metodo di ordine 4 abbiamo un errore dell'ordine di 10^{-8}.

Studiamo ora la convergenza per il metodo di **Eulero implicito**.
Nella tabella sono riportati gli errori più significativi.

i	n	Errore
1	2	9.3312934E-02
2	4	0.1077261
3	8	5.5675268E-02
11	2048	1.1630058E-03
12	4096	5.8287382E-04
13	8192	2.9182434E-04
14	16384	1.4656782E-04
15	32768	7.7724457E-05
16	65536	7.4267387E-05
17	131072	3.4570694E-05
18	262144	2.9683113E-05
19	524288	4.3511391E-05
20	1048576	8.9943409E-05
21	2097152	2.1505356E-04

Tabella 11: Studio della convergenza - Metodo di Eulero implicito

Notiamo che l'errore minimo si ha per $n = 2^{18}$, come per il metodo di Runge Kutta di ordine 1. Anche l'ordine di grandezza dell'errore è lo stesso.

Possiamo quindi concludere questo metodo ha il vantaggio della stabilità incondizionata, ma richiede un tempo di esecuzione maggiore e non dà miglioramenti apprezzabili in accuratezza.