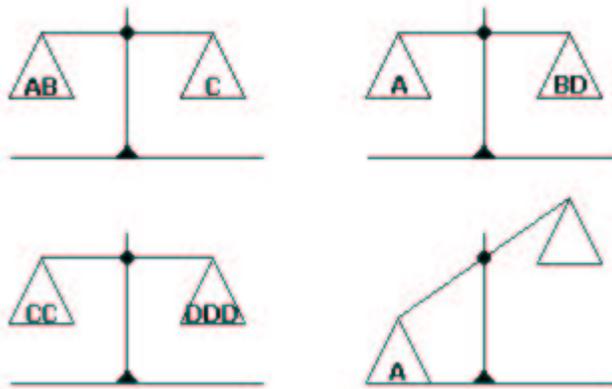


secondo certamen dello yeti

marzo 2005

Le soluzioni vanno inviate entro le ore **24.00** del **4 aprile 2005** all'indirizzo tullikos@libero.it; ricordate di inserire il nome del concorrente nel messaggio! Per maggiori informazioni sul regolamento e sui certamina, visitate il sito amate.altervista.org. Ogni soluzione corretta (quindi giustificata) di un problema riceverà tanti punti quanti il numero del problema stesso; ovviamente saranno assegnati anche punteggi parziali.

- 1. LE BILANCE** Sulle bilance in figura sono posate delle lettere di piombo, e a lettera uguale corrisponde peso uguale. Il fabbro deve riuscire ad equilibrare l'ultima bilancia, mettendo delle lettere sul piatto vuoto; ma non ha assolutamente voglia di tirare fuori più di uno stampo, quindi le lettere devono essere tutte uguali. Quale lettera, e quante volte, dovrà forgiare?



- 2. IL SEGRETO DELLA SCALA** Amerigo, il falegname del villaggio, dice ai suoi bambini: “In una scala dritta, il doppio dell’altezza di un gradino, aggiunto alla sua profondità, deve fare 62, 63 o 64 centimetri. Potete dirmi quanti tipi diversi di scale esistono, se la profondità di un gradino non può essere strettamente inferiore alla sua altezza né può raggiungere o superare il suo doppio?” (L’altezza e la profondità sono dei numeri interi)
- 3. GLI SCRIGNI** Su un tavolo ci sono 6 scrigni; su ognuno di essi c’è un’iscrizione. Sul primo scrigno l’iscrizione dice “nessuno di questi 6 scrigni contiene un tesoro” Sul secondo scrigno l’iscrizione dice “solo 1 di questi 6 scrigni contiene un tesoro” Sul terzo scrigno l’iscrizione dice “solo 2 di questi 6 scrigni contengono un tesoro” Sul quarto scrigno l’iscrizione dice “solo 3 di questi 6 scrigni contengono un tesoro” Sul quinto scrigno l’iscrizione dice “solo 4 di questi 6 scrigni contengono un tesoro” Sul sesto scrigno l’iscrizione dice “solo 5 di questi 6 scrigni contengono un tesoro” Sapendo che ciascuno scrigno contiene un tesoro se e solo se l’iscrizione su di esso dice il vero, in quali scrigni c’è un tesoro?

- 4. GIOCHI DI SQUADRA** In una classe ci sono n^2 studenti ($n > 1$). Ogni settimana tutti gli studenti prendono parte ad un quiz a squadre. La loro maestra li suddivide perciò in n squadre con n giocatori ciascuna. Dimostrare che dopo $n + 2$ settimane ci sono necessariamente due studenti che sono stati compagni che sono stati compagni di squadra in due settimane diverse.
- 5. LA SCACCHIERA MUTILATA** Prendiamo una scacchiera ed eliminiamo le due caselle poste agli angoli opposti di una diagonale; è possibile ricoprire le caselle rimaste con 31 pezzi da domino (che coprono ognuno due caselle)?
- 6. IL CANE BIONICO** Un uomo cammina per strada con il suo cane bionico, quando quest'ultimo scorge con la sua supervista un'amica in lontananza, e comincia a correre avanti e indietro dall'una all'altra, festosamente, a mano a mano che i due si avvicinano; quando poi si incontrano, si accuccia ai piedi del suo padrone. Sapendo che all'inizio essi distano un chilometro e che avanzano entrambi alla velocità costante di 3 km/h, mentre il cane corre a 9 km/h, qual è la distanza che esso percorre con le sue zampe robotizzate?

- 7. LA MEGASOMMA** Sia $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Calcolare

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{2}{1}\right) + f\left(\frac{3}{1}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{1}\right) + \\ & + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{2}\right) + \\ & + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{3}\right) + \\ & \quad \quad \quad + \cdots + \\ & + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \end{aligned}$$

dove n è un numero intero positivo.

- 8. VOLO INTORNO AL MONDO** Un gruppo di aerei è dislocato su una piccola isola. Il serbatoio di ogni aereo contiene esattamente carburante sufficiente a consentirgli mezzo giro del mondo, ma è possibile trasferire del carburante tra i serbatoi di due aerei in volo. La sola fonte di rifornimento è sull'isola, e, sia a terra che in volo, il rifornimento avviene in modo istantaneo (senza perdita di tempo). Dato che gli aerei hanno la stessa velocità costante e lo stesso consumo, qual è il numero minimo di aerei per assicurare a uno di essi di completare un giro attorno al mondo, e facendo sì che tutti gli aerei tornino alla base?
- 9. IL BUCO NELLA SFERA** Attraverso il centro una sfera viene fatto un buco cilindrico lungo 6 centimetri. Qual è il volume residuo della sfera?
- 10. NON VOGLIAMO NUMERI PRIMI** Trovare 5, poi 17, poi 99 numeri consecutivi composti (ovvero non primi).