

# Per i più tenaci

Appendice al *Certamen di Anacleto*

Essendomi pervenute parecchie proteste per la semplicità esagerata dei quesiti di Anacleto, mi sono permesso di aggiungerne qualcun altro più complicato. Chi vuole può mandarmi le risposte all'indirizzo e-mail `trentista@yahoo.it`. Non ci sono limiti di tempo per la risoluzione dei quesiti, né vi è un punteggio predefinito per ciascuno. Buon lavoro!!!

1. Trovare il numero delle soluzioni non negative  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$  dell'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$$

ove  $k$  è un intero positivo e  $n$  un intero non negativo.

2. Dimostrare che, comunque presi 39 numeri naturali consecutivi, ne esiste almeno uno la somma delle cui cifre (nell'usuale rappresentazione decimale) è divisibile per 11.
3. Su una lavagna sono scritti tre numeri interi. In seguito uno di essi viene cancellato e sostituito con la somma degli altri due, diminuita di 1. Questo procedimento viene eseguito parecchie volte, e ad un certo punto sulla lavagna appaiono i numeri

17, 2015, 2031

È possibile che i numeri iniziali fossero 3, 3, 3? E 2, 2, 2?

4. Esiste una permutazione della sequenza di numeri

1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., 2004, 2004

tale che per ogni  $k$  ci siano esattamente  $k$  altri numeri tra i due  $k$  (ossia che ci sia un numero tra i due 1, ce ne siano due tra i due 2 ecc.)?

5. Trovare tutte le quadruple  $(n, x, y, z)$  di interi positivi che soddisfino

$$\begin{cases} n \geq 2 \\ z \leq 5 \cdot 2^{2n} \\ x^{2n+1} - y^{2n+1} = xyz + 2^{2n+1} \end{cases}$$

6. Sono dati i seguenti numeri:

5, 6, 7, 8, 12, 13, 16, 17, 19, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 34,  
35, 38, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 57, 59

Trovarne 8 che soddisfino i seguenti criteri:

- Sommando il primo numero con il quinto, si ottiene l'ottavo, il quale è multiplo tanto del secondo quanto del quarto.
- Il sesto numero è il prodotto del terzo per  $\frac{1}{4}$  del quinto.
- Sommando il primo numero con l'ottavo, si ottiene un numero pari che supera di 1 il sesto.
- Il settimo numero, che è dispari, è uguale alla somma del quarto e del quinto.

7. Nella famosissima isola dei cavalieri e dei furfanti vi sono le società sportive Audax, Fortitudo, Juve e Rock, ciascuna delle quali si dedica, non necessariamente nell'ordine, a una sola di queste attività: basket, calcio, ciclismo e pallavolo. I loro iscritti, tutti giovani dilettanti, sono in numero diverso, e cioè (anche qui non nell'ordine) 22, 24, 32, 44.

Gianni vorrebbe cercare di attribuire ad ogni società il suo sport e il numero degli iscritti. Allora chiama a sé 12 persone, che si dividono in 5 gruppetti. Queste sono le loro affermazioni:

- 1° gruppo "La società con 32 iscritti è l'Audax"  
"La Rock è attiva nel calcio"
- 2° gruppo "Il numero dei ciclisti è 32"  
"La società di pallavolo è la Fortitudo"  
"Lo sport dell'Audax è il ciclismo"
- 3° gruppo "La società con più iscritti è la Rock"  
"La Fortitudo gioca a pallavolo"  
"Sono 44 gli sportivi della Juve"
- 4° gruppo "Chi pedala s'iscrive alla Rock"  
"I ciclisti sono la metà dei calciatori"
- 5° gruppo "La società del basket è l'Audax"  
"La Juve ha più soci della Fortitudo"

Sapendo che in ognuno di tali gruppi vi è uno e un solo furfante, riuscireste ad aiutare Gianni ad associare correttamente società, sport e iscritti?