

Soluzioni del *Certamen Mathematicum* aprile 2004

1. Una moneta blu vale in euro $15/11$, una rossa $16/11$ e una gialla $17/11$. Indicando con x il numero di monete blu, con y quello delle rosse e con z quello delle verdi si ha pertanto

$$\frac{15}{11}x + \frac{16}{11}y + \frac{17}{11}z = 11 \quad \text{cioè} \quad 15x + 16y + 17z = 121$$

Riscriviamo come:

$$15(x + y + z) + y + 2z = 121$$

Da ciò risulta che

$$\begin{cases} 15(x + y + z) = 120 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Infatti è impossibile che $x + y + z < 8$ perchè in tal caso avremmo $y + 2z \leq 16$, e questo sistema non ha soluzione.

Per cui $y = 1$, $z = 0$ (infatti x, y, z sono interi non negativi) e $x = 7$.

Il cliente dovrà pagare con 8 monete, 7 blu e una rossa.

2. *Soluzione 1* \triangleright Supponendo indipendenti gli arrivi dei due autobus, si ha che la probabilità che ne passi uno entro 4 minuti è

$$\frac{4}{12} + \frac{4}{19} \approx 0.54$$

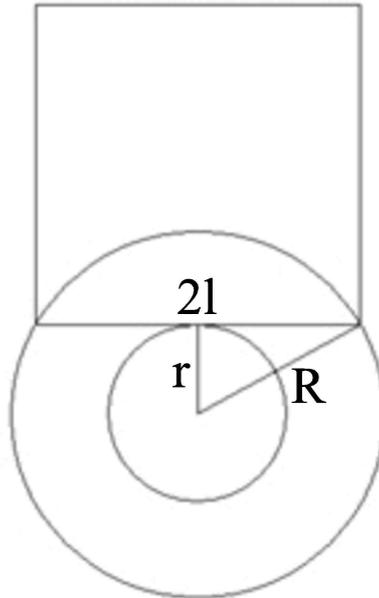
Soluzione 2 (Trentista) \triangleright Poichè gli autobus circolano per tutta la giornata, possiamo considerare come campione unitario un lasso di tempo di $19 \times 12 = 228$ minuti. Infatti questo campione si ripeterà più volte, magari anche solo in parte all'inizio e alla fine delle corse, ma comunque, poichè gli autobus circolano per circa 12 ore, la stima sarà attendibile.

Decidiamo che se i due arrivano nel minuto esatto di passaggio dell'autobus, riescono a prenderlo.

In questa tabella sono indicate le configurazioni possibili:

- + indica il passaggio dell'autobus numero 14
- * indica il passaggio dell'autobus numero 4
- indica i minuti di arrivo che non permettono a Cipro e Giorgio di prendere un autobus entro 4 minuti.

5. Ecco il disegno della corona con il quadrato.



L'area del cerchio maggiore è $A_{\Gamma} = \pi \cdot R^2$.

L'area del cerchio minore è $A_{\Gamma'} = \pi \cdot r^2$.

Dunque l'area della corona è $A_c = \pi \cdot (R^2 - r^2)$.

Il lato del quadrato è $l = \sqrt{R^2 - r^2} \implies$ l'area del quadrato è $A_q = l^2 = 4 \cdot (R^2 - r^2)$.

Il rapporto tra l'area del quadrato e l'area della corona circolare è

$$\frac{A_q}{A_c} = \frac{4}{\pi}$$

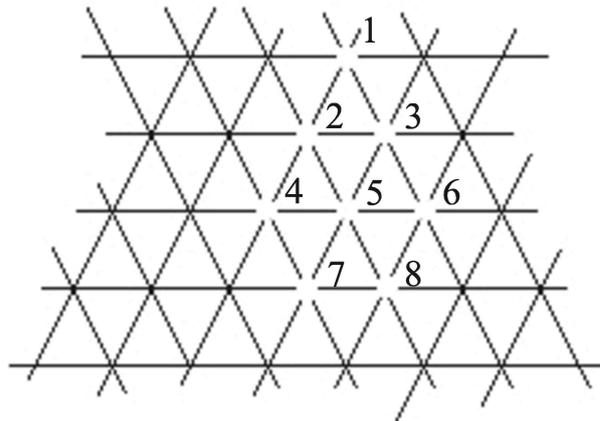
6. Vedi la figura nella pagina successiva.

Poichè bisogna colorare ogni nodo, da qualche parte ce ne saranno due dello stesso colore vicini. Siano ad esempio il 4 e il 5 rossi.

Dal momento che stiamo cercando una configurazione in cui nessun triangolo equilatero abbia tutti i vertici dello stesso colore, dunque il 2 e il 7 devono essere blu. Ora il 6 dev'essere rosso, altrimenti il triangolo 2-7-6 avrebbe tutti i vertici rossi. Ma allora, essendo il 5 e il 6 rossi, il 3 e l'8 devono essere blu, per lo stesso motivo precedente.

Adesso, come colorare l'1?

Se lo coloro di blu, il triangolo 1-2-3 ha tutti i vertici blu.
 Se lo coloro di rosso, il triangolo 1-4-6 ha tutti i vertici rossi.
 Dunque non esiste la colorazione richiesta.



7. A priori non si sa se le palline finali saranno rosse o verdi. Infatti se ad esempio all'inizio ci fossero tutte palline di uno stesso colore, alla fine ne resterebbero una o due di quel colore. Inoltre a ogni configurazione ottenuta partendo da n palline rosse e m verdi se ne può associare una con n palline verdi e m rosse.

La parità del numero di palline verdi (V) e rosse (R) si conserva: ne vengono eliminate 2 V (casi VVR e VVV) oppure 2 R (casi RRR e RRV). Distinguiamo diversi casi:

- se le palline sono in numero dispari, e le verdi sono in numero pari, resterà 1 pallina rossa
- se le palline sono in numero dispari, e le verdi sono in numero dispari, resterà 1 pallina verde
- se le palline sono in numero pari, e le verdi sono in numero pari, ne resteranno due dello stesso colore
- se le palline sono in numero pari, e le verdi sono in numero pari, ne resterà una rossa e una verde

8. Se la frazione fosse riducibile, esisterebbe $k \neq 1$ e a, b coprimi tali che

$$\begin{cases} 34n + 19 = ka \\ 51n + 20 = kb \end{cases}$$

Da questo sistema si ricava $17 = k(3a - 2b)$, cioè $k = 17$, poichè deve essere diverso da 1. Allora si avrebbe:

$$\frac{34n + 19}{17} = (2n + 1) + \frac{2}{17}$$

$$\frac{51n + 20}{17} = (3n + 1) + \frac{3}{17}$$

Dunque numeratore e denominatore non sono mai divisibili per 17, per cui la frazione data è irriducibile.

9. Chiamiamo *GOAL* la somma dei valori nella sottodiagonale (vedi figura) e numeriamo ogni casella per righe e colonne; così ad esempio la casella con la *G* sarà la $c_{2,1}$.

G				
	O			
		A		
			L	

Se *GOAL* valesse 20 si avrebbe $G = O = A = L = 5$. Ne consegue che la casella in alto a destra $c_{1,5} = 5$. Ma se i 5 fossero così disposti, la diagonale principale (quella che va dall'alto a sinistra in basso a destra), non avrebbe neanche un 5, contro le ipotesi.

Per rispondere alla domanda relativa al massimo valore del *GOAL*, basta fare alcune prove, utilizzando al posto dei numeri da 1 a 5 le lettere da a ad e, provando a disporre quanti più valori uguali nella sottodiagonale, in modo tale che alla fine, sostituendo 5 a tale valore ripetuto, si possa trovare il valore massimo possibile. Vi sono tante soluzioni, ma tutte portano alla stessa conclusione: al posto delle caselle del *GOAL* non ci possono essere più di 2 valori uguali. Eccone un esempio:

a	d	e	c	b
e	b	d	a	c
b	a	c	e	d
c	e	b	d	a
d	c	a	b	e

Basta ora sostituire a *b* il valore 5 e ad *e* e ad *a* i valori 4 e 3 per ottenere il massimo valore possibile per il *GOAL*, che risulta $5 + 5 + 4 + 3 = 17$.