# Soluzioni del *Certamen Mathematicum*

dicembre 2004

1. Notiamo che un qualsiasi quadrato modulo 4 è sempre congruo o a 0 o a 1. Infatti, se tale numero è pari possiamo scriverlo come $2k$, se è dispari invece come $2k+1$, per qualche $k \in \mathbb{N}$, ottenendo:

$$(2k)^2 = 4k^2 \equiv 0 \mod 4$$
$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4^k + 1 \equiv 1 \mod 4$$

Ovviamente vale $4n + 3 \equiv 3 \mod 4$, dunque questo numero non può essere un quadrato.

2. I differenti possibili tetronimi, a meno di rotazioni, sono sette; essi sono disegnati nella figura 1.

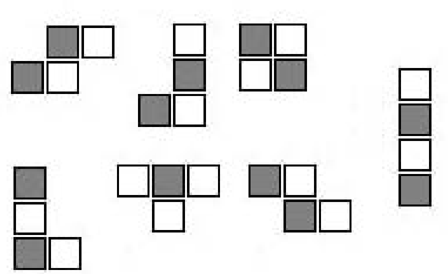

Figura 1: I tetronimi

Notiamo che ci sono dei tetronimi sovrapponibili mediante simmetria, ma sono da considerarsi distinti, in quanto per sovrapporli è necessario un movimento rigido nello spazio, non nel piano.

Non è possibile accostare tutti i tetronimi, senza sovrapporli, in modo da coprire un'area rettangolare $4 \times 7$, e ciò si può scoprire facilmente in questo modo: coloriamo i quadratini del rettangolo come una scacchiera. Otteniamo esattamente 14 quadratini bianchi e 14 neri.

Ora coloriamo allo stesso modo i diversi tetronimi (come in figura 1). Tutti i tetronimi hanno così due quadratini bianchi e due neri, tranne uno, che ne ha tre bianchi e uno nero (o viceversa).

Non è quindi possibile ricoprire il rettangolo con i diversi tetronimi.

3. Vogliamo dimostrare che un triangolo inscritto in una circonferenza di raggio $R$ è rettangolo se e solo se $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$.

   [⇒] Sia $c$ l'ipotenusa del triangolo rettangolo; allora vale il teorema di Pitagora
   $$a^2 + b^2 = c^2.$$
   Inoltre, poichè ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza,
   $$c = 2R,$$
   dove $R$ è il raggio della circonferenza circoscritta.
   Pertanto si ha:
   $$a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 = 2(2R)^2 = 8R.$$

   [⇐] *(Dimostrazione dovuta al Trentista)* Vediamo dapprima un lemma, chiamato anche teorema della mediana:

   **Lemma.** *In un triangolo, indicati con $a$, $b$, $c$ i lati e con $m$ la mediana relativa al lato $c$, vale la relazione:*
   $$2m^2 + \frac{1}{2}c^2 = a^2 + b^2.$$
   La dimostrazione è molto semplice e si basa sulla figura 2.

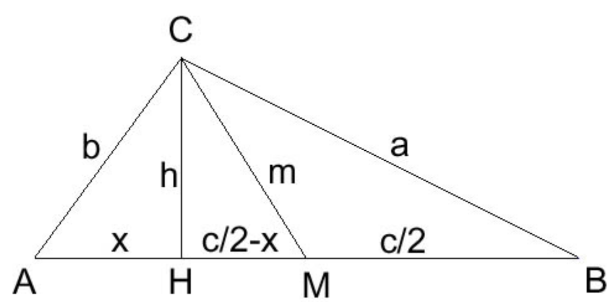


Figura 2: Teorema della mediana

   I segmenti $AM$ e $MB$ hanno lunghezza $\frac{c}{2}$.

Tracciamo l'altezza $h$ relativa al lato $c$. Sia $x$ la misura del segmento $AH$.
Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli $AHC$, $HBC$ e $HMC$, otteniamo le relazioni:

$$\begin{gathered} x^2 + h^2 = b^2 \\ (c - x)^2 + h^2 = a^2 \\ h^2 + \left(\tfrac{c}{2} - x\right)^2 = m^2 \end{gathered}$$

Sommando le prime due e svolgendo i quadrati:

$$\begin{gathered} 2h^2 = a^2 + b^2 - 2x^2 - c^2 + 2cx \\ h^2 = m^2 - \tfrac{c^2}{4} - x^2 + cx \end{gathered}$$

Da cui otteniamo:

$$a^2 + b^2 - 2x^2 - c^2 + 2cx = 2m^2 - \frac{c^2}{2} - 2x^2 + 2cx,$$

ovvero

$$2m^2 + \frac{1}{2}c^2 = a^2 + b^2.$$

Ora vediamo l'esercizio. Per ipotesi vale la relazione $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$, dove $R$ è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo. Dunque:

$$a^2 + b^2 = 8R^2 - c^2$$

Inoltre vale la relazione della mediana $2m^2 + \frac{1}{2}c^2 = a^2 + b^2$, che diventa:

$$2m^2 + \frac{1}{2}c^2 = 8R^2 - c^2$$

ovvero

$$2m^2 = 8R^2 - \frac{3}{2}c^2.$$

Supponiamo ora di poter inscrivere il triangolo in una semicirconferenza il cui diametro coincide con il lato $c$. Se otteniamo $m = R$ abbiamo finito, poichè un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo. Abbiamo che:

$$2m^2 = 8R^2 - \frac{3}{2}(2R)^2$$

ovvero

$$2m^2 = 2R^2,$$

e ciò dimostra la tesi.

4. $n$ ha due cifre, quindi possiamo scrivere $n = 10a + b$, con $0 < a \leq 9$ e $0 \leq b \leq 9$. Vogliamo che $S$, la somma delle cifre di $10^n - n$ sia divisibile per 170.

   In notazione posizionale possiamo scrivere

$$10^n - n = \underbrace{10000000\ldots000}_{n \text{ volte}} - ab = \underbrace{999999\ldots9}_{n-2 \text{ volte}} cd,$$

   dove $10c + d = 100 - 10a - b$.

   Ora, se $b \neq 0$, avremo che $c + d = 10 - a + 9 - b$, mentre se $b = 0$ vale $c + d = 10 - a$.

   Vediamo prima il caso $b \neq 0$. Risulta:

$$\begin{aligned} S &= 9(n-2) + (9-a) + (10-b) \\ &= 9(10a + b - 2) + (9 - a) + (10 - b) \\ &= 89a + 8b + 1. \end{aligned}$$

   Perciò otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} S \equiv 9a + 8b + 1 \equiv 0 \mod 10 \\ S \equiv 4a + 8b + 1 \equiv 0 \mod 17 \end{cases}$$

   Notiamo che, siccome deve essere divisibile per 170, $89a + 8b + 1$ deve essere pari, e pertanto $a$ dev'essere dispari.

   Si hanno i seguenti casi:

   - $a = 1$. Nessun valore di $b$ risolve il sistema.
   - $a = 3$. L'unico valore di $b$ che risolve il sistema è 9.
   - $a = 5$. L'unico valore di $b$ che risolve il sistema è 8.
   - $a = 7$. L'unico valore di $b$ che risolve il sistema è 7.
   - $a = 9$. L'unico valore di $b$ che risolve il sistema è 6.

   Manca ora da considerare il caso $b = 0$. Si ha

$$S = 9(10a - 2) + 10 - a = 89a - 8.$$

   Il sistema che si ricava è

$$\begin{cases} 9a - 8 \equiv 0 \mod 10 \\ 4a - 8 \equiv 0 \mod 17 \end{cases}$$

   che ha come soluzione $a = 2$.

   Gli unici numeri che hanno le proprietà richieste dal quesito sono 20, 39, 58, 77 e 96.

5. Usiamo la solita tabellina del Trentista...

| 1° lancio | 2° lancio | Prodotto | Probabilità | Quadrato | Primo |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1/36 | x | |
| | 2 | 2 | 1/36 | | x |
| | 3 | 3 | 1/36 | | x |
| | 4 | 4 | 1/36 | x | |
| | 5 | 5 | 1/36 | | x |
| | 6 | 6 | 1/36 | | |
| 2 | 1 | 2 | 1/24 | | x |
| | 2 | 4 | 1/24 | x | |
| | 3 | 6 | 1/24 | | |
| | 4 | 8 | 1/24 | | |
| 3 | 1 | 3 | 1/36 | | x |
| | 2 | 6 | 1/36 | | |
| | 3 | 9 | 1/36 | x | |
| | 4 | 12 | 1/36 | | |
| | 5 | 15 | 1/36 | | |
| | 6 | 18 | 1/36 | | |
| 4 | 1 | 4 | 1/24 | x | |
| | 2 | 8 | 1/24 | | |
| | 3 | 12 | 1/24 | | |
| | 4 | 16 | 1/24 | x | |
| 5 | 1 | 5 | 1/72 | | x |
| | 2 | 10 | 1/72 | | |
| | 3 | 15 | 1/72 | | |
| | 4 | 20 | 1/72 | | |
| | 5 | 25 | 1/72 | x | |
| | 6 | 30 | 1/72 | | |
| | 7 | 35 | 1/72 | | |
| | 8 | 40 | 1/72 | | |
| | 9 | 45 | 1/72 | | |
| | 10 | 50 | 1/72 | | |
| | 11 | 55 | 1/72 | | |
| | 12 | 60 | 1/72 | | |
| 6 | 1 | 6 | 1/36 | | |
| | 2 | 12 | 1/36 | | |
| | 3 | 18 | 1/36 | | |
| | 4 | 24 | 1/36 | | |
| | 5 | 30 | 1/36 | | |
| | 6 | 36 | 1/36 | x | |

Vediamo che la probabilità che il prodotto dei due lanci sia un quadrato è $\frac{18}{72}$, mentre la probabilità che esso sia primo è $\frac{12}{72}$.

Dunque Giorgio ha maggiori probabilità di vincere la scommessa.