Certamen Mathematicum

dicembre 2004

Questi problemi sono proposti per farvi divertire: non ci sono premi in palio, se non la gloria tra i pochi che sono a conoscenza dell'esistenza di questa gara. Se volete partecipare, inviate le vostre soluzioni, anche parziali, entro la mezzanotte del **9 gennaio 2005**, all'indirizzo `es3@virgilio.it`. Per qualsiasi curiosità, critica o suggerimento scrivete allo stesso indirizzo.

Troverete le soluzioni e le classifiche su `http://amate.altervista.org`.

1. *(2 punti)* Dimostrare che, dato n intero, $4n+3$ non è un quadrato perfetto.
2. *(7 punti)* Chiamiamo tetronimo una figura piana formata da quattro quadrati di lato unitario, non sovrapposti, che abbiano ognuno almeno un lato in comune con uno degli altri.
   - Considerando equivalenti i tetronimi che si possono sovrapporre con un movimento rigido nel piano, quali sono i possibili tetronimi?
   - È possibile accostare i diversi tetronimi, senza sovrapporli, in modo da coprire un area rettangolare 4×7?
3. *(10 punti)* La circonferenza circoscritta ad un triangolo di lati a, b, c ha raggio R. Dimostrare che il triangolo è rettangolo se e solo se
$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$$
4. *(7 punti)* Trovare tutti gli interi n di due cifre tali che la somma delle cifre di $10^n - n$ sia divisibile per 170.
5. *(4 punti)* Quando non sa cosa fare, Kirk gioca con i suoi dadi: ne ha di vari tipi, ma tutti hanno le facce numerate con i primi interi positivi $1, 2, 3, \ldots$ fino al numero di facce.
   Oggi ha inventato queste regole: prima lancia un dado a sei facce. Se esce 1, 3 o 6, lancia nuovamente lo stesso dado; se esce 2 o 4 lancia un dado a quattro facce, mentre se esce 5 lancia un dado a dodici facce.
   "Scommetto che il prodotto dei due lanci sarà un numero primo!" dice a Giorgio.
   Ma Giorgio ribatte: "E io scommetto che sarà un quadrato perfetto!".
   Chi avrà maggiori possibilità di vincere la scommessa?