

Certamen Mathematicum

aprile 2004

Questi problemi sono proposti per farvi divertire: non ci sono premi in palio, se non la gloria tra i pochi che sono a conoscenza dell'esistenza di questa gara. Se volete partecipare, inviate le vostre soluzioni, anche parziali, entro il **19 aprile 2004**, all'indirizzo es3@virgilio.it. Per qualsiasi curiosità, critica o suggerimento scrivete allo stesso indirizzo.

Troverete le soluzioni e le classifiche su <http://amate.altervista.org>.

1. (*2 punti*) Mentre Sara sta lavorando come commessa in un negozio, arriva un cliente straniero, che vuole comprare un regalino del costo di 11 euro per la fidanzata. Il problema è che possiede solo moneta del suo Paese, ma Sara decide di accettarla. Il cambio purtroppo è un po' complicato:
11 monete blu = 15 euro
11 monete rosse = 16 euro
11 monete gialle = 17 euro
Con quante monete il cliente deve pagare?
2. (*2 punti*) Cipro e Giorgio devono andare ad allenarsi con la loro squadra, Piallaenne, ma sono in ritardo e non sanno gli orari degli autobus. Arrivano alla fermata e scoprono di non avere l'orologio. Vedono che passa un 4 ogni 12 minuti e un 14 ogni 19 minuti; entrambi impiegano 6 minuti per arrivare al campo, luogo del ritrovo. Teme che gli altri, stufo di aspettare, giochino da soli, ma sperano di essere al campo entro 10 minuti. Che probabilità hanno di farcela?
3. (*2 punti*) Sem e Anacleto sono da soli a casa e sono molto affamati, ma per (loro) fortuna trovano un grosso pezzo di formaggio finito lì chissà come. Sem impiegherebbe 30 minuti per mangiarlo tutto, mentre Anacleto solo 20. Siccome però iniziano insieme, quanto ci mettono a mangiarlo?
4. (*4 punti*) Su un'isola ci sono due specie di persone: i cavalieri, che sono sempre sinceri, ed i furfanti, che mentono sempre. Un esploratore incontra quattro ragazze, Maria, Silvia, Demi e Viviana, in vena di prenderlo in giro. Maria dice qualcosa, ma l'esploratore non riesce a sentire. Allora Silvia afferma: "Maria dice di essere ...", ma uno starnuto dell'esploratore gli impedisce di sentire la fine della frase. Demi dice: "Silvia ha affermato che Maria dice di essere cavaliere". A questo punto, Maria afferma con forza: "Demi mente!", ma subito Silvia ribatte: "Non è vero!". Viviana, infine, dice: "Sì che è vero!". Sapresti determinare quante di queste ragazze sono cavalieri e quanti furfanti?

5. (4 punti) Una corona circolare è limitata dalle due circonferenze Γ e Γ' , di raggio R ed r rispettivamente, con $R > r$. Si costruisce un quadrato avente per lato una corda di Γ tangente a Γ' . Trovare quanto vale il rapporto tra l'area del quadrato così costruito e l'area della corona circolare.
6. (5 punti) Dato un reticolo infinito di triangoli equilateri, si colori ogni nodo di rosso o di blu. Si considerino tutti i triangoli equilateri, di qualsiasi grandezza, costruiti unendo tre nodi del reticolo, anche senza che i lati siano coincidenti con i segmenti che costituiscono il reticolo. Si può verificare il caso in cui nessuno di questi triangoli equilateri abbia i tre vertici dello stesso colore?
7. (5 punti) In una scatola ci sono molte palline, rosse e verdi. Estraggo tre palline alla volta; se tra queste ce n'è esattamente una verde, oppure nessuna rossa, rimetto nella scatola una pallina verde, altrimenti rimetto una rossa. Di che colore saranno le palline nella scatola quando non potrò più fare estrazioni, cioè quando rimarranno meno di tre palline?
8. (8 punti) Dire se le frazioni della forma

$$\frac{34n + 19}{51n + 20}$$

con $n \in \mathbb{N}$, sono irriducibili.

9. (8 punti) Una scacchiera 5×5 è suddivisa in 25 quadrati unitari. In ognuno dei quadrati si inserisce un numero scelto tra $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, in modo che in ogni riga, in ogni colonna e nelle due diagonali compaia una e una sola volta ognuno dei cinque numeri. Chiamiamo "gol" la somma dei numeri nei quattro quadrati immediatamente sotto la diagonale che va dalla casella in alto a sinistra a quella in basso a destra. Mostrare che il "gol" non può valere 20. Qual è il suo massimo valore possibile?