Nota: queste soluzioni (scritte come al solito dal Trentista) non mi piacciono molto, però non ho nessuna voglia di riscriverle...

"SARO' BREVE"

<u>ESERCIZIO 1</u>

Ho deciso di rispondere prima alla domanda centrale, in quanto le altre due sono tra loro strettamente correlate, e quindi trattarle insieme mi costerà meno fatica…
Sia t il numero totale di sassolini iniziali. È immediato vedere che ad ogni mossa vengono tolti (non importa da dove) *ESATTAMENTE* 2 sassolini. Dunque se prima della mossa vi era un numero *pari* di sassolini totali, essi rimarranno *pari*, se ve n'erano un numero *dispari*, anche dopo la mossa ne rimarrà un numero *dispari* (in termini matematici si dice che *si conserva la parità* di t).
Dunque, alla fine noi vogliamo che rimangano 2 sassolini, uno in ogni mucchietto $\Rightarrow$ all'inizio n e k dovevano essere tali che la loro somma fosse pari $\Rightarrow$ cioè n e k dovevano essere o *entrambi* PARI o *entrambi* DISPARI.

Se $n = k$, *un vincitore c'è sempre* (ammesso che segua le mie indicazioni…). La strategia da seguire è semplice: Berengario analizza la situazione:

- se il numero totale di sassolini (che abbiamo visto dover essere pari) è del tipo $4j + 2$, con $j \in \mathbf{N}$, ossia divisibile per 2 ma non per 4, (ciò significa che in entrambi i mucchietti c'è un n° *dispari* di sassolini) abbiamo che Armida, alla prima mossa, toglie 2 sassolini, ottenendo un n° totale multiplo di 4. Poi Berengario, facendo la sua mossa, ne toglie altri 2, facendo tornare la situazione precedente… e così via. Se *Berengario* non si distrae e fa le mosse seguenti, è *sicuro di vincere*:
  - se Armida toglie 2 sassolini da un mucchietto, egli deve toglierne 2 dall'altro;
  - se Armida toglie un sassolino per mucchio, anch'egli ne toglierà uno per mucchio.

- se il numero totale di sassolini è del tipo $4j$, con $j \in \mathbf{N}$, ossia divisibile per 4, abbiamo che Anselma, alla prima mossa, toglie 2 sassolini, ottenendo un n° totale multiplo di 2 ma non di 4. Poi Berengario, facendo la sua mossa, ne toglie altri 2, facendo tornare la situazione precedente… e così via. Se *Armida* non si distrae e fa le mosse seguenti, è *sicura di vincere*:
  - alla prima mossa toglie un sassolino da ognuno dei mucchietti. Poi sta a vedere cosa fa Berengario:
  - se Berengario toglie 2 sassolini da un mucchietto, lei deve toglierne 2 dall'altro;
  - se Berengario toglie un sassolino per mucchio, anche lei ne toglierà uno per mucchio.

Se $k = n + 2$, non c'è sempre un vincitore… Anche qui comunque la strategia da seguire è semplice: Berengario analizza la situazione:

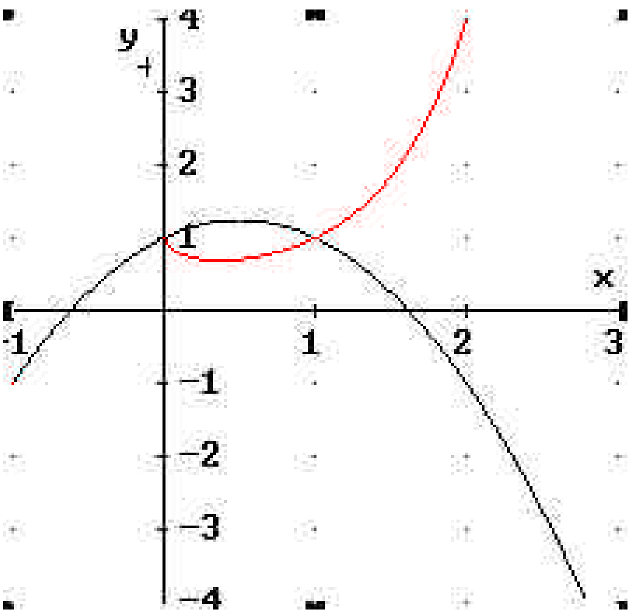
- se il numero totale di sassolini è del tipo $4j + 2$, con $j \in \mathbf{N}$, ossia divisibile per 2 ma non per 4, allora un mucchietto ha $2j$ sassolini e l'altro $2j+2$. Armida non è per niente contenta della situazione, perché (vedi punto precedente) questa per lei è una situazione perdente… Allora (mica scema…) decide, se lei tanto non può vincere, almeno di *evitare* la vittoria di Berengario. Come? Semplicemente TOGLIENDO ogni volta che tocca a lei 2 sassolini dal mucchietto che ne possiede di *meno*. Berengario, con tutta la buona volontà, non riuscirà a pareggiare i conti, cosicché ad un certo punto Armida eliminerà *definitivamente* un mucchietto, e Berengario non potrà più riuscire a lasciare un sassolino in ognuno dei due mucchietti!!! (forse la spiegazione è un po' contorta, ma provate a farlo tra di voi, vedrete che tutto fila…)

- se il numero totale di sassolini è del tipo *4j*, con j∈**N**, ossia divisibile per 4, abbiamo che Armida gongola… questa, per lei, è una situazione vincente!!!
  - alla prima mossa toglie 2 sassolini dal mucchietto che ne ha *di più*. Otteniamo una situazione in cui *n = k* e la somma è del tipo *4h + 2*. Prima questa era una situazione vincente per Berengario, ma ora è Berengario che deve fare la prima mossa!!! Dunque:
  - se Berengario toglie 2 sassolini da un mucchietto, lei ne toglie 2 dall'altro;
  - se Berengario toglie un sassolino per mucchio, anche lei ne toglierà uno per mucchio.

  e così di sicuro vincerà.

Abbiamo visto che Armida vince più volte rispetto a Berengario, e in una anzi riesce a toglierli la vittoria (che sarebbe stata sua, matematicamente parlando…). Questo insegna ai signori maschi: *mai essere gentili con le donne, perché quelle, invece di ringraziare, ne approfittano!!*

ESERCIZIO 2



Nel grafico visualizzato, che rappresenta in NERO la funzione $1 + x – x^2$ e in ROSSO la funzione x^x, si vede che la disuguaglianza (anzi, la *disuglianza*…) è verificata nell'intervallo (0,1] chiuso a destra. Come verificarlo analiticamente?
La parabola $y = -x^2 + x + 1$ è rivolta verso il basso, ha il vertice in (1/2, 5/4) e vale 1 sia in x = 0 che in x = 1. Ne consegue che tra zero e uno tale parabola assume valori sempre *superiori* a 1.
Voglio ora verificare che invece, tra zero e uno, x^x è < 1.
$x^x < 1 \Rightarrow e\text{^}(\log x^x) < e^0 \Rightarrow e^{x(\log x)} < e^0 \Rightarrow x (\log x) < 0$.

Poiché stiamo ragionando (vedi testo) sui numeri reali positivi, x è > 0 e dunque devo porre, affinché la disuguaglianza sia vera, $\log x < 0 \Rightarrow x < 1$.
Ho verificato ciò che volevo, ossia che tra zero e uno la funzione x^x assume valori inferiori a 1.
Ricapitolando dunque:
$1 + x – x^2 = x^x$ per x < 1
$1 + x – x^2 = x^x$ per x = 1
$1 + x – x^2 = x^x$ per x > 1

ESERCIZIO 3

Poniamo $t = x^2$. Otteniamo l'equazione $t^5 – t^4 + 8t^3 – 24t^2 + 32t – 48 = 0$
Non è difficile vedere che essa si annulla per t=2. Ne consegue che il polinomio iniziale si annulla per x = sqrt(2) e x = -sqrt(2).
Il polinomio iniziale è dunque divisibile per $(x^2 – 2)$.
Il risultato di tale divisione è $x^8 + x^6 + 10 x^4 – 4 x^2 + 24$.
Dunque $x^{10} – x^8 + 8x^6 – 24x^4 + 32x^2 – 48 = (x^2 – 2)(x^8 + x^6 + 10 x^4 – 4 x^2 + 24)$.

Tale prodotto è zero quando almeno uno dei due fattori è nullo. Il primo abbiamo visto annullarsi per x = +- sqrt(2). E il secondo??
$x^8 + x^6 + 10x^4 - 4x^2 + 24 = x^8 + x^6 + 6x^4 + \underline{4x^4 - 4x^2 + 1} + 23 = x^8 + x^6 + 6x^4 + 23 + (2x^2 - 1)^2$.
Il secondo fattore risulta cioè essere una somma di quadrati, o comunque di numeri POSITIVI o NULLI; e tale somma è ovviamente >= 23 qualsiasi sia l'x scelta. ⇒ Non si annulla mai.

Le uniche due soluzioni reali sono x = +- sqrt(2).

ESERCIZIO 4

Siano i 4 numeri considerati x, x+1, x+2 e x+3. Ne consegue che devo dimostrare che
x (x+1) (x+2) (x+3) + 1 è un quadrato perfetto.
Svolgendo i calcoli ottengo l'espressione $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$. A prima vista è un po' complicato vedere se effettivamente è il quadrato di qualche cosa…
Mostrerò ora la via più breve, seppur un po' misteriosa, per giungere a trovare il quadrato cercato. Per chi avesse tempo (e voglia…) di sapere come REALMENTE ho trovato tale formula, rimando alla Nota posta al termine di questo esercizio.
Dunque, possiamo scrivere il nostro polinomio di 4° grado come $x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + x^2 + 3x + 1 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 1) = (x^2 + 3x + 1)^2$.

Pertanto è vero: il successivo del prodotto di 4 interi consecutivi è un quadrato perfetto.

[**Nota: Procedimento per trovare la scomposizione di x(x+1)(x+2)(x+3)+1**.
Se x = 1 ottengo come risultato 25 = $5^2 = (2+\mathbf{3})^2$
Se x = 2 ottengo come risultato 121 = $11^2 = (5+\mathbf{6})^2$
Se x = 3 ottengo come risultato 361 = $19^2 = (9+\mathbf{10})^2$
Se x = 4 ottengo come risultato 841 = $29^2 = (14+\mathbf{15})^2$
ecc.
I numeri in **arancione** dànno luogo a una successione così fatta:
$a_1 = 3$
$a_2 = 3 + 3$
$a_3 = 3 + (3 + 4)$
$a_4 = 3 + (3 + 4 + 5)$
…………
$a_n = 3 + (3 + 4 + 5 + \dots + n + (n+1)) = 3 + 2(n-1) + (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) = 3 + 2n - 2 + n(n-1)/2 = 1 + 2n + n(n-1)/2$.

Per ottenere il quadrato che mi interessa (ossia il numero che genera $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$) devo *sommare* tale quantità al numero precedente (vedi negli esempi: **3** + 2, **6** + 5 ecc.).
Otteniamo $[1 + 2n + n(n-1)/2] + [2n + n(n-1)/2] = n^2 + 3n + 1$.
Ed ecco svelato l'arcano!!!]