ESAME DI TEORIA DEI GIOCHI 4ª UD
"ORIGINAL TRADE MARK"

ESERCIZIO 1

Come ben sappiamo, nelle equazioni di SECONDO GRADO la SOMMA di due radici è equivalente all'opposto del coefficiente del termine di primo grado… Dunque, possiamo scrivere
$n^4 - 10n^3 + 27n^2 - 2n + k = (n^2 - 7n + j)(n^2 + \alpha n + \beta) =$
$= n^4 - 7n^3 + jn^2 + \alpha n^3 - 7\alpha n^2 + \alpha jn + \beta n^2 - 7\beta n + \beta j$
da cui segue

$$\begin{cases} 1 = 1 & \text{(uguaglianza alquanto ovvia…)} \\ -10 = -7 + \alpha & \Rightarrow \quad \alpha = -3 \\ 27 = j - 7\alpha + \beta \\ -2 = \alpha j - 7\beta \\ k = \beta j \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 = j + \beta \\ -2 = -3j - 7\beta \\ k = \beta j \end{cases}$$

e si trova con facilità che $\beta = -4$ e $j = 10$, per cui $k = -40$. Per cui
$n^4 - 10n^3 + 27n^2 - 2n + k = (n^2 - 7n + j)(n^2 + \alpha n + \beta) = (n^2 - 7n + 10)(n^2 - 3n - 4)$
e, scomponendo ulteriormente, si ha: $(n-2)(n-5)(n+1)(n-4)$, le cui soluzioni sono 2,5,-1 e 4.
Come si può constatare, effettivamente le due soluzioni 2 e 5 hanno somma 7, come richiesto.

ESERCIZIO 2

Come al solito, non è semplicissimo descrivere tutto il ragionamento occorrente per giungere alla soluzione: farò del mio meglio…
Cominciamo da B: Se B fosse cavaliere, C sarebbe un furfante, e dunque B non sarebbe un cavaliere, come invece abbiamo supposto
Þ *B non è un Cavaliere*
Ora, D può essere un cavaliere? No, poiché dice di essere paggio
Þ *D non è un Cavaliere*
C può essere un cavaliere? Se così fosse, B sarebbe un cavaliere, mentre abbiamo visto che così non è
Þ *C non è un Cavaliere*
Riprendiamo adesso il nostro abitante D: sappiamo che non è un cavaliere, ma potrebbe essere sia paggio che furfante. Se fosse paggio, la seconda affermazione sarebbe vera, e dunque la prima e la terza false. Se fosse furfante, le tre affermazioni sarebbero tutte false. In ogni caso sappiamo che
la prima e la terza affermazione di D sono False.
Dunque *C non è un Furfante*; ma non era neanche un cavaliere, ricordate??? Per cui
Þ *C è un Paggio*
Poiché di C sappiamo che la prima affermazione è falsa, la seconda dev'essere vera, dunque
Þ *A non è un Cavaliere*
Riprendiamo ora il nostro amico B (che, poverino, si stava sentendo un po' trascurato…). La prima sua affermazione è errata, e anche la seconda è falsa
Þ *B è un Furfante*
Ora, rimangono 4 possibilità per attribuire ad A e a D le rispettive categorie di appartenenza: bisogna però tener conto che, poiché la terza affermazione di D è falsa,
il numero dei furfanti non deve superare quello dei paggi.

Essendoci già un paggio (C) e un furfante (B), *non è possibile che sia A che D siano furfanti.*
Le altre soluzioni invece (A paggio e D furfante, A furfante e D paggio, oppure entrambi paggi) sono accettabili.
Ricapitolando, dunque, possiamo identificare con precisione solo B (furfante) e C (paggio), limitandoci a sapere di A e di D che non sono cavalieri.

<u>ESERCIZIO 3</u>

1 4	2 1	3 9	4 6
5 7	6	8	9
6 6	8	4	7 2
8 1	1	0	7

A lato si può vedere la corretta soluzione dello schema; per ottenerla si ragioni nel modo seguente: si consideri innanzitutto l'1 orizzontale. Esso è un numero primo di due cifre, il cui quadrato è invece costituito da 4 cifre: con semplici calcoli si vede dunque che tale numero primo deve essere > 31. Inoltre dev'essere tale che la sua ultima cifra sia la prima del suo quadrato… L'unica possibilità è proprio 41, il cui quadrato è 1681.
Dunque il 2 vert. è 1681. Ora, ragioniamo sull'1 vert. : anche questo è un quadrato, che comincia con 4 ed ha 4 cifre: anche qui con semplici calcoli si ottiene che le uniche soluzioni possibili sono i quadrati dei numeri da 64 a 70. Ma poiché il 5 orizz. dev'essere formato da cifre successive, la seconda cifra di tale quadrato dev'essere compresa tra 4 e 8 (estremi inclusi) e diversa da 6. Le uniche possibilità rimaste sono 4489 (67^2) e 4761 (69^2). Ma il 6 orizz. ci informa che la terza cifra dell'1 vert. non può essere 8… dunque l'1 vert. è 4761 e il 4 vert. è 69. Indi per cui il 3 orizz. è 96.
Il 7 vert. è un cubo di 2 cifre: le possibilità non sono molte: 27 e 64. Il 64 è da scartare perché il 6 orizz. ha da avere cifre tutte diverse tra loro… Dunque il 7 vert. è 27. L'8 orizz. è 41*27 = 1107.
Mancano ancora due caselle: l'ultima del 5 orizz., che potrebbe contenere il numero 8 oppure il numero 5, e la terza del 6 orizz., che potrebbe ospitare lo zero oppure il numero 4. Il 3 vert. è un multiplo di 41… e gli unici multipli di 41 che terminano con 0 sono i multipli di 410. I multipli di 410 che cominciano per 9 sono 9020, 9430 e 9840. Per quanto detto prima, 9840 è l'unica soluzione accettabile.

<u>ESERCIZIO 4</u>

Prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo *n* lanci') =

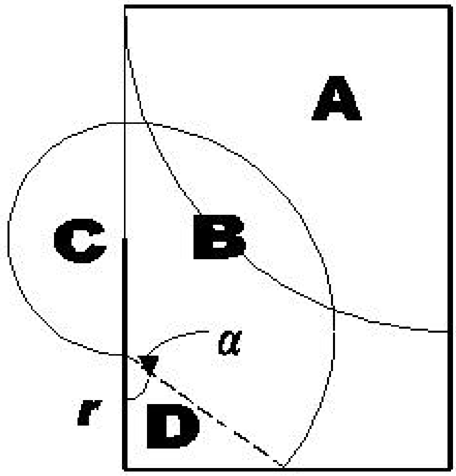
= prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo 1 lancio') +	0	+
prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo 2 lanci') +	6/36	+
prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo 3 lanci') +	15/216	+
prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo 4 lanci') +	20/1296	+
prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo 5 lanci') +	15/7776	+
prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo 6 lanci') +	6/46656	+
prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo 7 lanci') +	1/279936	+
prob ('Arrivo sulla 7^a casella dopo un numero > 7 di lanci')	0	=

[ai valori di tali probabilità si può arrivare provando tutti i possibili tentativi… è da notare comunque che i denominatori sono via via le varie potenze di 6, mentre i numeratori prendono i valori della 7^a riga del Triangolo di Tartaglia]

Sommando i valori ottenuti si arriva alla frazione 70993/279936, cioè circa il 25,36%.

ESERCIZIO 5

La figura a fianco ci mostra ciò che possono mangiare le due pecorelle: la pecorella in B potrà mangiare l'erba compresa nella parte A di terreno, la pecorella in A potrà mangiare l'erba che è cresciuta nei terreni B,C e D.



Area A = $6*6*\pi /4 \cong 28{,}2743$ m^2
Area B = $4*4*\pi /3 \cong 16{,}7551$ m^2
Area C = $2*2*\pi /2 \cong 6{,}2831$ m^2
Area D = $2*2\sqrt{3} /2 \cong 3{,}4641$ m^2
Area (B+C+D) $\cong 26{,}5023$ m^2

Dunque è più felice la pecora legata in B.

[PS: per chi si chiedesse come mai la porzione B è un terzo di circonferenza, basta notare che il lato indicato con *r* è esattamente la metà della lunghezza della corda della pecora legata lì vicino, dunque α=60° e cioè la porzione di "torta" a cui ho dato il nome di B ha un angolo al centro di 120°, ossia proprio un terzo di cerchio]

ESERCIZIO 6

Stiamo giocando a Modulo 3: una possibile soluzione sarebbe anche in questo caso analizzare tutti i possibili casi… Ogni giocatore ha 5 diverse possibilità (da 1 a 5), quindi le possibili terne ottenute sarebbero 5*5*5=125 !! Un po' tante, in realtà…
Vediamo di sfoltirle un po', ragionando opportunamente.
REGOLA 1: considero la terna (1,x,y) ove $1 \leq x \leq 5$ e $1 \leq y \leq 5$; poi la terna (2,x,y) e la terna (3,x,y) con gli stessi x e y precedenti. Queste tre terne avranno come somma diversi resti nella divisione per 3, e dunque daranno la vittoria a Giorgio, a Eugenio o alla Ester (ogni riferimento a persone della vita reale è puramente casuale…), una volta per ciascuno: nessuno cioè risulta avvantaggiato rispetto agli altri due.
REGOLA 2: Le terne (a,b,x), (a,b,x+1) e (a,b,x+2) hanno diversi resti mod 3.Se dunque fisso a e b (sempre tra 1 e 5) posso considerare solo le possibilità 1 e 2 del terzo giocatore, in quanto le altre tre non influiscono…
Vediamo cosa accade:

Giorgio	***Eugenio***	***Ester***	***SOMMA mod 3***
4	1	1	0
4	1	2	1
4	2	1	1
4	2	2	2
4	3	1	2
4	3	2	0
4	4	1	0
4	4	2	1
4	5	1	1
4	5	2	2

In Totale ottengo (per Giorgio che gioca il 4), 3 zeri, 4 "uni" e 3 "due". Se Giorgio avesse giocato un 5, basta aggiungere 1 e ragionare in $\mathbf{Z}_3$: ottengo 3 "uni", 4 "due" e 3 zeri.

Quindi ho infine una quantità equivalente a 6 resti "zero", 7 resti "uno" e 7 resti "due".
La probabilità maggiore di vincere ce l'avranno i giocatori che puntano su resto 1 o 2.

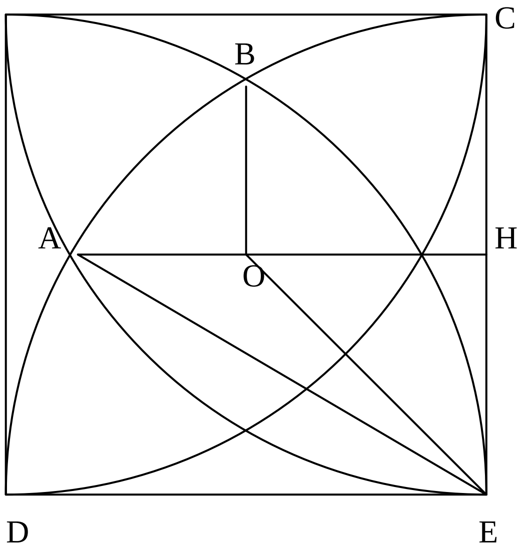
ESERCIZIO 7

Certo che esiste: un possibile esempio è

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_k = a_{k-1} + 7 \end{cases}$$

che dà luogo alla successione 1, 8, 15, 22, 29, 36, ... dei successivi dei multipli di 7; in esso effettivamente appaiono sia numeri pari che dispari.

ESERCIZIO 8



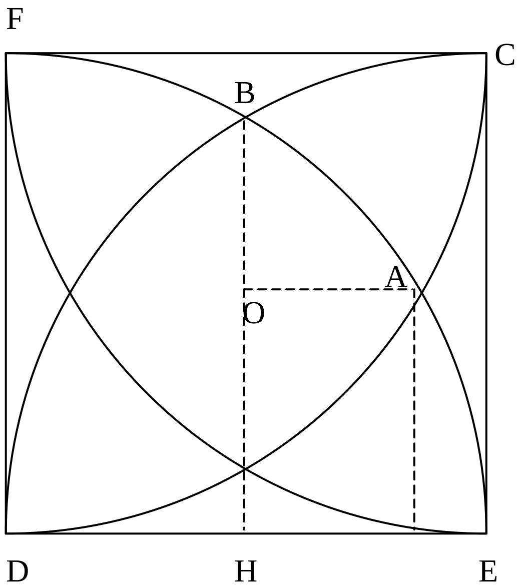
Calcoliamoci l'Area del triangolo curvilineo AOB, dopo la moltiplicheremo per 4.

Area AOB =
= Area DCE –2 (Area ADE + Area AOE) =

Notiamo che ADE è 1/12 della circonferenza di raggio ED = l, e che AO = $l*\sqrt{3}/2 - l/2$.
(infatti AH sarebbe l'altezza del triangolo equilatero ACE di lato l…)

Dunque Area DCE = $l^2*\pi/4$
Area ADE = $1/12 * l^2*\pi$
Area AOE = $l/2\ (\sqrt{3} - 1) * l/2 * 1/2$

Dunque Area AOB = $[\pi/4 - 2(\pi/12 + (\sqrt{3} - 1)/8)]\ l^2 = (\pi/12 - \sqrt{3}/4 + ¼)\ l^2 \cong 0{,}0788\ l^2$
Moltiplicando per 4 otteniamo l'area dell'intera figura centrale, che sarà circa $0{,}3152\ l^2$.



In alternativa si poteva vedere che l'Area di BAO nel disegno 2 equivale all'Integrale del quarto di circonferenza FE, calcolato a partire da ½ l fino a $\sqrt{3}/2\ l$, diminuito dell'Area del rettangolo di base OA e altezza OH, che abbiamo già visto essere pari a $l/2 * (\sqrt{3}/2 - ½)\ l$.
La funzione che esprime la Circonferenza della quale vogliamo calcolare l'integrale è $f(x) = \sqrt{(l - x^2)}$.
Poniamo per un attimo $l = 1$ (solo per semplicità di calcoli… poi basterà aggiungere un l^2 al risultato per ottenere la vera soluzione richiesta dal problema).

Otteniamo dunque:

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{(1 - x^2)}\, dx$$

Proseguendo calcolando l'integrale indefinito e procedendo per sostituzione $x = \cos t$
$dx = -\text{sen } t\, dt$

si ottiene

$$\int \sqrt{(1 - \cos^2 t)} * (-\text{sen } t)\, dt = \int - \text{sen}^2 t\, dt.$$

Procedendo due volte con l'integrazione per parti, otteniamo

$$\int - \text{sen}^2 t\, dt = (\cos t * \text{sen } t - t)/2$$

Gli estremi di integrazione erano $\sqrt{3}/2$ che equivale (nella variabile t) a un angolo di 30° = $\pi/6$ e ½ che equivale a 60° = $\pi/3$. Cioè abbiamo

$$\int_{\pi/3}^{\pi/6} - \text{sen}^2 t\, dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \text{sen}^2 t\, dt = \Big[(t - \cos t * \text{sen } t)/2\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = (\pi/3 - \sqrt{3}/4)/2 - (\pi/6 - \sqrt{3}/4)/2 = \pi/12$$

Dunque l'integrale cercato vale $\pi/12\ l^2$. Ad esso andrà tolto il rettangolo calcolato precedentemente, di area $(\sqrt{3}/4 - ¼)\ l^2$. Otteniamo $(\pi/12 - \sqrt{3}/4 + ¼)\ l^2$, come nel caso precedente. Anche qui moltiplicando per 4 si ottiene la soluzione totale, cioè l'area della figura evidenziata sul testo.