Di ritorno

Settembre 2003

ESERCIZIO 1

Per risolvere quest'esercizio sarà quasi inevitabile dover elencare tutti i casi possibili… a qualcuno potrebbero sembrare troppi, ma in realtà basta fare delle semplici osservazioni per diminuire notevolmente il numero di essi…

1) Sappiamo che i bambini totali sono meno di 18. Ora, se i Green avessero almeno 5 bambini, i Brown ne avrebbero almeno 6 e gli Smith almeno 7, e il totale sarebbe dunque, contando anche i figli dei Black, maggiore di 18. Ne consegue che

i Green hanno al massimo 4 bambini.

2) Se i Black avessero 3 bambini, i Green ne avrebbero almeno 4, i Brown almeno 5 e gli Smith almeno 6. Anche in questo caso il totale raggiunge già quota 18, il che è contrario alle ipotesi che ci ha dato il Prof. Smith, l'eminente teorico dei numeri. Pertanto

i Black hanno al massimo 2 bambini.

Detto questo, non è difficile elencare tutti i casi, prestando attenzione a non superare quota 17 per la SOMMA.

Possiamo vedere a lato la relativa tabella:

Black	Green	Brown	Smith	SOMMA	PRODOTTO
1	2	3	4	10	24
1	2	3	5	11	30
1	2	3	6	12	36
1	2	4	5	12	40
1	2	3	7	13	42
1	2	3	8	14	48
1	2	4	6	13	48
1	2	3	9	15	54
1	2	4	7	14	56
1	2	3	10	16	60
1	2	5	6	14	60
1	3	4	5	13	60
1	2	4	8	15	64
1	2	3	11	17	66
1	2	5	7	15	70
1	2	4	9	16	72
1	3	4	6	14	72
1	2	4	10	17	80
1	2	5	8	16	80
1	2	6	7	16	84
1	3	4	7	15	84
1	2	5	9	17	90
1	3	5	6	15	90
1	2	6	8	17	96
1	3	4	8	16	96
1	3	5	7	16	105
1	3	4	9	17	108
1	3	5	8	17	120
1	4	5	6	16	120
2	3	4	5	14	120
1	3	6	7	17	126
1	4	5	7	17	140
2	3	4	6	15	144
2	3	4	7	16	168
2	3	5	6	16	180
2	3	4	8	17	192
2	3	5	7	17	210
2	4	5	6	17	240

Adesso, noi sappiamo che Jones, pur sapendo il numero di casa del Prof. Smith, (ossia il prodotto del numero di bambini delle 4 famiglie), ha difficoltà a capire quanti effettivamente essi siano. Ciò significa che dobbiamo cercare dei prodotti che siano in comune a due o più possibili "combinazioni" di bambini… Si nota facilmente che abbiamo le seguenti possibilità: PRODOTTO = 48, 60, 72, 80, 84, 90, 96 e 120.

In TUTTI questi casi i Black hanno *un solo figlio*, eccetto col 120, nel qual caso i figli potrebbero essere *anche* 2.

È dunque questa l'informazione che il Prof. Smith dà a Jones, l'unica in grado di fargli comprendere i numeri dei figli di ogni famiglia.

Infine, dunque, i Black hanno 2 figli, i Green 3, i Brown 4 e gli Smith 5.

ESERCIZIO 2

Notiamo subito che le frasi scritte NON POSSONO ESSERE TUTTE FALSE, altrimenti l'ultima sarebbe vera, e dunque cadremmo in una contraddizione.
Inoltre, le frasi si escludono a vicenda, per cui se una fosse vera, le altre sarebbero automaticamente false. Per cui, se ne esiste una vera, ne esistono N-1 false. L'unica possibilità è che la frase vera sia la Penultima, che afferma "Ci sono esattamente N-1 affermazioni false su questa lavagna". Ed è proprio così, infatti…

ESERCIZIO 3

Dopo aver notato che k | k! Sempre, in quanto k! = k*(k-1)*(k-2)*…*2*1, bisogna che k si possa ottenere come prodotto di *due* fattori *distinti* e *strettamente minori* di k stesso. Dunque gli unici valori NON accettabili risultano essere i numeri PRIMI e i QUADRATI PERFETTI di numeri PRIMI. Però i quadrati perfetti di numeri primi p > 2 vanno bene perché se p > 2 => $k = p^2 > 4$ quindi $k! = p^2!$ ha tra i suoi fattori anche $2k = 2p^2$, e k divide 2k.

Es:	2^2	NON divide	2!	2 è un numero PRIMO
	3^2	NON divide	3!	3 è un numero PRIMO
	4^2	NON divide	4!	4 è un QUADRATO di un numero PRIMO
	5^2	NON divide	5!	5 è un numero PRIMO
	6^2	DIVIDE	6!	6 è un numero COMPOSTO
	7^2	divide 7!		7 è un numero PRIMO
	8^2	DIVIDE	8!	8 è un numero COMPOSTO
	9^2	divide 9!		9 è un QUADRATO di un numero PRIMO
	16^2	DIVIDE	16!	16 è un QUADRATO, ma NON di un numero PRIMO!

ESERCIZIO 4

$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$
Innanzitutto notiamo due cose: la simmetricità delle soluzioni, ossia il fatto che se (a,b,c) è una soluzione anche (a,c,b), (b,a,c), (c,a,b) ecc. lo sono; e in secondo luogo che se (a,b,c) è una soluzione anche $(a,-b,-c)$, $(-a,b,-c)$ e $(-a,-b,c)$ lo sono.
Trovata una terna ordinata che sia soluzione, cioè, possiamo immediatamente ricavarne altre che siano soluzioni esse stesse.
Analizziamo dunque le soluzioni in **N**, ossia in cui i numeri a,b,c siano = 0.
La somma dei tre quadrati dev'essere PARI: dunque tra x,y e z ci devono essere *due* numeri *dispari* e *uno pari* oppure *tutti e tre pari*.
Supponiamo (tanto per simmetria non cambia nulla) che sia z pari. Si ha $z = 2k$. con k ε **N**
$x^2 + y^2 + 4k^2 = 4xyk$.
Se x e y fossero entrambi dispari si avrebbe
$x = 2h+1$ $\quad y = 2j+1$ $\quad$ con h,j ε **N**
$(2h+1)^2 + (2j+1)^2 + 4k^2 = 4xyk$
$4h^2 + 4h + 1 + 4j^2 + 4j + 1 + 4k^2 = 4xyk$
$2 = 4(xyk - h^2 - h - j^2 - j - k^2)$
e, poiché x,y,h,j,k sono tutti INTERI POSITIVI (o nulli), viene un assurdo.
Dunque anche x e y devono essere PARI.
Ma dunque $x = 2h$ $\quad y = 2j$ $\quad$ con h,j ε **N**
$4h^2 + 4j^2 + 4k^2 = 16hjk$
$h^2 + j^2 + k^2 = 4hjk$.

Otteniamo dunque una nuova equazione simile a quella iniziale, da risolvere ancora in **N**.
Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per la prima parte dell'esercizio, otteniamo che h, j e k devono essere tutti e tre pari. Se indichiamo $h = 2a$, $j = 2b$ e $k = 2c$, risulta che
$a^2 + b^2 + c^2 = 64\, abc$.
E così via, da ogni equazione ne deriva un'altra che concerne e lega tra loro le METÀ dei precedenti numeri. Come si può capire, questo procedimento non può andare avanti all'infinito, in quanto l'insieme dei Naturali è limitato inferiormente (possiede infatti un minimo, 0). Se dunque esistesse una soluzione in cui intervenissero numeri strettamente positivi, ciò porterebbe a una contraddizione… [se ben ricordo, questo procedimento dimostrativo si chiama della "*discesa infinita*", ma non lo assicuro al 100%].
C'è una possibilità che avanza, però… la soluzione (0,0,0), ossia l'unica terna in cui x,y,z sono *uguali* alle rispettive *metà*.
L'unica soluzione è dunque (0,0,0).

<u>ESERCIZIO 5</u>

$$4^8 * 5^{17} = (2^2)^8 * 5^{17} = 2^{16} * 5^{17} = (2^{16} * 5^{16}) * 5 = 10^{16} * 5 = \underbrace{1000\ldots000}_{16\text{ zeri}} * 5 = \underbrace{5000\ldots000}_{16\text{ zeri}}$$

In totale il numero ha 17 cifre.

<u>ESERCIZIO 6</u>

Sia n il generico numero da trovare.
Se n ha una sola cifra, si deve ottenere $n = 3n$, cioè $2n = 0$, $\Rightarrow$ n=0.
Se n ha due cifre possiamo scriverlo come $10x + y$, con $1 = x = 9$ e $0 = y = 9$. Otteniamo
$10x + y = 3\,(x+y)$
$10x + y = 3x + 3y$
$7x = 2y$
Dunque in tal caso, viste le limitazioni poste su x e y, l'unica soluzione possibile è x=2, y=7
$\Rightarrow n$=27.
Se n ha 3 cifre (chiamiamole x,y,z), notiamo che la somma delle cifre stesse è al massimo 27.
Dunque $3(x+y+z) = 3*27 = 81$. Per cui il triplo della somma delle cifre di tale numero non potrà mai essere di 3 cifre!
Analogamente, per n di 4 cifre, $3(x+y+z+w) = 3*36$ e non sarà mai di 4 cifre!
Così, ragionando allo stesso modo, risulta che gli unici due numeri con questa proprietà sono 0 e 27.

<u>ESERCIZIO 7</u>

$P(2) = 32 + 8 – 4 = 36 = 2^2 * 3^2$
$P(3) = 243 + 27 – 6 = 264 = 2^3 * 3 * 11$
Già tra P(2) e P(3) si nota come il MCD è al MASSIMO $2^2 * 3 = 12$.
Verifichiamo che OGNI numero della forma $n^5 + n^3 – 2n$ è divisibile per 12.
$n^5 + n^3 – 2n = n\,(n^4 + n^2 – 2) = n\,(n^4 + 2n^2 – n^2 – 2) = n\,(\,n^2\,(n^2 + 2) – 1(n^2 + 2)) = n\,(n^2 – 1)(n^2 +2)$
$= n\,(n – 1)(n + 1)(n^2 + 2)$
Tale numero, [n e N, è sicuramente divisibile per 3: infatti uno tra i tre numeri (n-1), n e (n+1) è un multiplo di 3. Questo poiché ogni naturale è scrivibile come $3k$, oppure $3k$+1, oppure $3k$-1, per un k opportuno.
Se è $3k$ otteniamo $(n-1)*n*(n+1) = (3k-1)*3k*(3k+1)$
Se è $3k+1$ otteniamo $(n-1)*n*(n+1) = 3k*(3k+1)*(3k+2)$

Se è $3k$-1 otteniamo $(n-1)*n*(n+1) = (3k-2)*(3k-1)*3k$
Inoltre, se n è PARI, n e (n^2+2) sono PARI. Dunque il prodotto è divisibile per 4.
Se n è DISPARI, $(n-1)$ e $(n+1)$ sono PARI. Dunque il prodotto è divisibile per 4.
In totale, ogni numero della forma $n^5 + n^3 - 2n$ è divisibile sia per 4 che per 3, ossia per 12.

ESERCIZIO 8

Consideriamo la frazione a/b, con b ? 0. Il numero decimale ad essa corrispondente si ottiene, com'è noto, dividendo il numeratore per il denominatore. Quando si esegue una divisione, la procedura si ripete sempre uguale a se stessa: ad ogni passo si produce un resto parziale che è sempre minore del dividendo b. La divisione, se il resto non è nullo, prosegue aggiungendo 0 a tale resto parziale e dividendo il numero ottenuto per b.
Poiché il resto parziale è minore di b, al massimo ci possono essere b resti parziali diversi:
da 0 a b-1.
Se, dunque, la divisione procede, perché non si è arrivati ad un resto nullo, ad un certo punto si troverà nuovamente un resto già incontrato e, quindi, si dovrà eseguire una divisione parziale già fatta. Dal momento che si ripetono uguali i resti e i quozienti parziali, l'algoritmo della divisione entra in un «ciclo» sempre uguale a se stesso, che produce all'infinito lo stesso gruppo di cifre: il periodo.
Quindi, o troviamo un risultato intero, o un risultato decimale finito (ossia, se vogliamo vederli così, con uno 0 periodico), o un risultato periodico. Ad ogni frazione (o divisione) corrisponde dunque un numero periodico.

ESERCIZIO 9

Prob('Ottengo 6 lanciando un dado') = $^1/_6$
Prob('Ottengo sempre n^i pari gettando 3 volte un dado') =
= Prob('Ottengo un n° pari la 1^a volta') * Prob('Ottengo un n° pari la 2^a volta')* Prob('Ottengo un n° pari la 3^a volta') = ½ * ½ * ½ = $^1/_8$
Dunque è più facile ottenere 6 con un solo lancio.

ESERCIZIO 10

È ovvio che s dev'essere *maggiore* di ciascuno dei tre numeri p, q, r.
Con semplici calcoli si ha che
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
e così via (la funzione "fattoriale" cresce molto rapidamente)
Se s fosse anche solo uguale a 4, si avrebbe che p, q ed r dovrebbero essere al massimo = 3.
Il membro a sinistra diventa dunque al massimo 6+6+6=18 < 24.
Allo stesso modo 5! > 3*4! e 6! > 3*5!
E in generale $n! > 3*(n-1)!$ se $n > 3$ [Infatti $n! = n*(n-1)! > 3*(n-1)!$ se $n>3$]
Per s = 1 o s = 2 banalmente l'equazione non ha soluzioni.
Per s = 4 abbiamo visto che non ce ne sono.
Per s = 3 si verifica che solamente quella proposta è la soluzione.

Grazie al **Trentista Eugenio**, queste soluzioni sono le sue!
(io non avevo, e non ho tuttora, voglia di scriverle)