Problemi su problemi

Agosto 2003

1. Su un'isola ci sono due tipi di persone: cavalieri, che dicono sempre la verità, e furfanti, che mentono sempre. Su quest'isola il 3% della popolazione ha i capelli rossi. Sto parlando al telefono con un abitante (che non ho mai visto) dell'isola; mi dice che ha i capelli rossi. So che sull'isola ci sono 3 furfanti ogni 17 cavalieri. Qual è la probabilità che la persona con cui sto parlando sia rossa di capelli? E la probabilità che sia un furfante? *(5 punti)*
2. Trovare le soluzioni intere di $y^3 - x^3 = 91$ *(6 punti)*
3. Nelle scuole di Matelandia non si usa la numerazione decimale. La professoressa ha appena spiegato perché l'equazione $x^2 + 14x + 41 = 0$ non ha soluzioni reali. Ora scrive sulla lavagna il compito per domani: risolvere $x^2 - 34x + 323 = 0$. Avrà soluzioni reali? Se sì, come le scriveranno gli studenti? *(7 punti)*
4. Una scacchiera rettangolare 125*35 ha caselle alternativamente bianche e nere; le caselle negli angoli sono nere. Quante sono le caselle attraversate in punti interni da una diagonale? Quante di queste sono bianche? *(5 punti)*
5. Un bersaglio è costituito da un cerchio circondato da 4 corone circolari concentriche. Le 5 circonferenze hanno raggio r, 2r, 3r, 4r, 5r. A ogni zona è associato un punteggio: 5 per il cerchio centrale, 4, 3, 2, 1 per le corone circolari, dall'interno verso l'esterno. Un giocatore scaglia a caso due freccette, che centrano entrambe il bersaglio. Qual è il punteggio più probabilmente totalizzato? *(8 punti)*
6. Dimostrare che per ogni intero n maggiore o uguale a 1, il numero reale $\sqrt{4n-1}$ è irrazionale. *(7 punti)*
7. Il numero naturale n dà resto 59 sia diviso per 2004 sia diviso per 2005. Qual è l'ultima cifra di n? *(4 punti)*
8. Trovare tutti i numeri naturali n tali che $n^4 + 4$ è primo. *(7 punti)*
9. Un pallone da calcio è ottenuto cucendo 20 pezzi esagonali e 12 pentagonali. Una cucitura unisce i lati di 2 pezzi adiacenti. Quante sono le cuciture? *(3 punti)*
10. Trovare r, s numeri reali non negativi tali che

$$2^{(r^4+s^2)} + 2^{(r^2+s^4)} = 8$$

$$r + s = 2$$

(7 punti)

11. Siano a,b numeri reali positivi tali che a + b = 1. Trovare il minimo valore intero di $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$ *(6 punti)*
12. Un rombo ha area 80 cm^2 e la diagonale maggiore è il doppio dell'altra. Quanto misura il lato? *(3 punti)*
13. Sia ABCD un quadrato. Costruiamo al suo interno il triangolo equilatero ABE. Quanto misura l'angolo CED? *(5 punti)*

14. Nel disegno a fianco ogni rettangolino ha perimetro pari al numero scritto al suo interno. Qual è il perimetro del rettangolo in alto a destra? *(5 punti)*

2	?
1	2

15. Cinque ragazzi A, B, C, D, E portano un cappellino di colore bianco o rosso e ciascuno di loro non sa di che colore è il suo cappellino. Chi porta il cappellino rosso dice sempre la verità, mentre chi porta quello bianco mente sempre.
    A dice: "Io vedo tre cappellini rossi e uno bianco"
    B dice: "Io vedo quattro cappellini bianchi"
    C dice: "Io vedo un cappellino rosso e tre bianchi"
    D dice: "Io vedo quattro cappellini rossi"
    Determinare il colore del cappellino di ogni ragazzo. *(6 punti)*
16. Due persone A e B mentono ogni tanto: una dice la verità tre volte su quattro e l'altra quattro volte su cinque. Quando affermano la stessa frase, qual è la probabilità che questa sia vera? (supponiamo che si possa decidere la verità o meno di tutte le frasi) *(5 punti)*
17. Due matematici, Andrea e Bruno, si incontrano una sera. Andrea dice: "La somma delle cifre della mia età è uguale alla somma delle cifre della tua età". Bruno risponde: "Ma il prossimo anno la mia somma sarà il quadruplo della tua", al che Andrea ribatte: "Sì, ma tra due anni le nostre somme saranno nuovamente uguali". Sapendo che nessuno dei due ha già raggiunto i cento anni, determinare le due età. *(5 punti)*
18. $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 196883^2$. Qual è la cifra delle unità di N? *(3 punti)*
19. Scrivere tutti i numeri naturali minori di 1000 che hanno esattamente tre divisori (es: 12 ha 6 divisori: 1,2,3,4,6,12). *(3 punti)*
20. Dal 1979 ogni anno si tiene a Matelandia la festa della birra. Se l'n-esima festa è organizzata in un anno che è divisibile per n, diremo che l'anno è birresco. Per esempio, l'anno 2001, in cui si è tenuta la 23° festa, è stato birresco perché 2001 = 87 * 23 è divisibile per 23. Trovare tutti gli anni birreschi, supponendo che la festa si continuerà a tenere ogni anno. *(6 punti)*
21. Diremo che un insieme A composto da quattro cifre distinte e non nulle è interscambiabile, se con tutte le quattro cifre di A possiamo formare due coppie costituite da due cifre in modo che i due prodotti di ciascuna coppia, scambiandone l'ordine delle cifre, siano uguali. Per esempio, l'insieme A = {1;2;3;6} è interscambiabile, perché 21 * 36 = 12 * 63. Trovare tutti gli insiemi interscambiabili. *(6 punti)*
22. Sia data una progressione aritmetica infinita di numeri naturali. Dire se sono corrette le seguenti affermazioni:
    a. Se 5 divide un termine, esiste un termine divisibile per 25.
    b. Se c'è un termine divisibile per 7, ce ne sono infiniti. *(5 punti)*
23. Dato il triangolo ABC con CAB – ABC = 90°, detti M il punto medio di AB e H il piede dell'altezza relativa ad AB, dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC è uguale ad HM. *(6 punti)*
24. Quante e quali, se in numero finito, sono le soluzioni di $x^x - 2^x - x^2 = 10$? *(5 punti)*
25. $5^{20} + 2^{30}$ è primo? *(6 punti)*

Qualche commento sui problemi

3) Verranno tolti 1000 punti a chi risponde “con la penna”.

16) Per alcune affermazioni, come ad esempio “questa frase è falsa”, non si può decidere la verità senza incorrere in un paradosso. Infatti se decidiamo che la frase sia vera, deve essere falsa ma se decidiamo che è falsa allora sarà falso che è falsa, cioè sarà vera. Il paradosso presentato è simile a quello chiamato paradosso di Epimenide o del mentitore, un classico della filosofia antica: Epimenide, che era un cretese, diceva: “Tutti i cretesi sono mentitori”. Un’altra versione è quella di affermare: “Io sto mentendo”. Tutti questi esempi si possono raggruppare sotto il cosiddetto paradosso dell’autoreferenza, cioè di un’affermazione che parla di se stessa, risolto da alcuni introcucendo il concetto di diversi livelli di linguaggio. Ad esempio la frase “è estate e fa caldo” è di primo livello, mentre se parliamo del linguaggio, ad esempio dicendo “nelle frasi di senso compiuto è necessario un verbo” siamo al secondo livello, perché usiamo il linguaggio per parlare del linguaggio. Non si può giudicare la verità di un’affermazione di livello più elevato rispetto a quello in cui ci troviamo. Così l’affermazione “questa frase è falsa” è di secondo livello perché si riferisce a se stessa, quindi non si può deciderne la verità.

Un concetto simile venne introdotto nella matematica da Kurt Gödel nel secolo scorso. Il Teorema di Gödel appare nel 1931 nel suo scritto *Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei “Principia Mathematica” e di sistemi affini.* I *Principia Mathematica* sono un’opera pubblicata da Russell e Whitehead tra il 1910 e il 1913, in cui si tenta di dare una dimostrazione di coerenza e completezza (cioè che si possa decidere sempre della verità o falsità delle affermazioni senza generare paradossi) al sistema dell’aritmetica, come cercato da diversi decenni da matematici e filosofi. Una versione semplificata del Teorema di Gödel, chiamato anche Teorema di incompletezza, perché smentisce il tentativo di Russel e Whitehead, potrebbe essere questa: **tutte le assiomatizzazioni coerenti dell’aritmetica contengono proposizioni indecidibili**. Questo significa che qualsiasi assioma o insieme di assiomi (cioè verità che si assumono come tali ma non dimostrate né dimostrabili, che servono come base per tutta la matematica) scegliamo, avremo sempre delle proposizioni di cui non possiamo decidere la verità. Gödel costruì quindi un enunciato equivalente al paradosso linguistico “questa frase è falsa”; non scelse l’enunciato “Questo enunciato dell’aritmetica è falso”, perché la verità o falsità può dipendere dal sistema di proposizioni scelto. L’enunciato di Gödel fu invece: “Questo enunciato dell’aritmetica non ammette alcuna dimostrazione nel sistema dei *Principia Mathematica*”. Questo enunciato è indimostrabile (all’interno dei *Principia Mathematica*), ma vero. Quindi il sistema dei *Principia Mathematica* è incompleto, perché ci sono enunciati veri dell’aritmetica che i metodi di dimostrazione del sistema sono troppo deboli per dimostrare. Questo fece fallire il tentativo di Russell e di altri: mentre cercavano di costruire un sistema completo e coerente, Gödel dimostrò che non è possibile.

22) Una progressione aritmetica è una successione di numeri tali che la differenza tra due termini consecutivi è costante ed è detta ragione della progressione. Una progressione aritmetica può essere così costruita per ricorrenza:

$$a_0 = a$$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

dove d è la ragione della progressione.

Esercizietto facile: trovare l’espressione del termine n-esimo in funzione di a e di d. Trovare la somma dei primi N termini di una progressione aritmetica.

Una progressione geometrica è una successione di numeri reali tali che il rapporto tra due termini consecutivi è costante ed è detto ragione della progressione. Una progressione geometrica può essere così costruita per ricorrenza:

$$a_0 = a$$

$$a_n = a\, a_{n-1}$$

L’espressione generale del termine n-esimo è quindi $a_n = a\, r^{(n-1)}$, dove r è la ragione.