Problemi su problemi

Agosto 2003

ESERCIZIO 1

È un problema di Probabilità Condizionata: ne troveremo un altro all'esercizio 16. Utilizzerò per questo la formula della Probabilità Condizionata che dice: "La probabilità che si verifichi A se si sa che si è verificato E è uguale a

p=p(A e E)/p(E).

Con i dati a disposizione, so che, su 100 abitanti dell'isola, 85 sono cavalieri e 15 sono furfanti (basta risolvere la proporzione *furfanti:cavalieri=3:17*, sapendo che *furfanti+cavalieri=100*), e che tra tutti essi 3 hanno capelli rossi, mentre 97 no.
Io ora SO che la persona con cui sto parlando mi ha detto "Io ho i capelli rossi".
Qual è la probabilità che il tipo con cui sto parlando mi dica di avere i capelli rossi?
Ragioniamo: può essere un Cavaliere E avere effettivamente i capelli rossi O essere un Furfante E non averli rossi. In totale (alla congiunzione E corrisponde l'operazione *, alla disgiunzione O la +):
prob(Mi dice di averli rossi)=85/100*3/100+15/100*97/100 = 1710/10000.

Prob(Ha i capelli rossi, sapendo che mi ha detto di averli) = Prob(Ha i capelli rossi E mi dice di averli [cioè è un Cavaliere])/Prob(Mi dice di averli rossi) = 3/100*85/100 / 1710/10000 = 255/1710 ≈ 14.91%

Prob(E' un furfante, sapendo che mi ha detto di averli) = Prob(E' un furfante E mi dice di avere capelli rossi [cioè in realtà non li ha rossi])/Prob(Mi dice di averli rossi) = 15/100*97/100 / 1710/10000 = 1455/1710 ≈ 85.08%

ESERCIZIO 2

Scomponiamo il binomio a destra secondo la famosa formula per cui

$$y^3-x^3 = (y-x)\,(x^2+xy+y^2)$$

dove i due fattori non sono ulteriormente scomponibili.
Il prodotto soprascritto dev'essere uguale a 91. Ma 91, banalmente, è scomponibile come 7 x 13 (o –7 x –13) . Dunque abbiamo le seguenti possibilità, che danno luogo a otto diversi sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} y-x=1 \\ x^2+xy+y^2=91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x=91 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x=7 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x=13 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$$

$\begin{cases} y-x=-1 \\ x^2+xy+y^2= -91 \end{cases}$

$\begin{cases} y-x=-91 \\ x^2+xy+y^2= -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y-x=-7 \\ x^2+xy+y^2= -13 \end{cases}$

$\begin{cases} y-x=-13 \\ x^2+xy+y^2= -7 \end{cases}$

Questi quattro sistemi non hanno soluzione :
infatti x^2+xy+y^2 è sempre =0:
Se x e y sono entrambi positivi
$x^2+y^2+xy > x^2+y^2-2xy = (x-y)^2=0$
Se x e y sono entrambi negativi
$x^2+y^2+xy > x^2+y^2-2xy = (x-y)^2=0$
Se x e y hanno segno opposto
$x^2+y^2+xy > x^2+y^2+2xy = (x+y)^2=0$

In alternativa, si può notare che, rispetto alla variabile x, $\Delta= -3\ y^2 \leq 0$

Dalla prima delle due equazioni del primo sistema si ricava $y=x+1$. Sostituendo nella seconda otteniamo l'equazione di secondo grado $x^2+1+2x+x^2+x+x^2=91$
Cioè $3x^2+3x+1=91$
$3x^2+3x+1=91 \Rightarrow 3x^2+3x-90=0 \Rightarrow \Delta=1089 \Rightarrow$ 2 soluzioni : $x=5 \quad y=6$
$x= -6 \quad y= -5$

Dalla prima delle due equazioni del secondo sistema si ricava $y=x+91$. Sostituendo nella seconda otteniamo l'equazione di secondo grado $x^2+8281+182x+x^2+91x+x^2=1$
Cioè $3x^2+273x+8281=1$
$3x^2+273x+8281=1 \Rightarrow 3x^2+273x+8280=0 \Rightarrow \Delta=-24831 \Rightarrow$ NO soluzioni REALI

Dalla prima delle due equazioni del terzo sistema si ricava $y=x+7$. Sostituendo nella seconda otteniamo l'equazione di secondo grado $x^2+49+14x+x^2+7x+x^2=13$
Cioè $3x^2+21x+49=13$
$3x^2+21x+49=13 \Rightarrow 3x^2+21x+36=0 \Rightarrow \Delta=9 \Rightarrow$ 2 soluzioni : $x= -3 \quad y=4$
$x= -4 \quad y=3$

Dalla prima delle due equazioni del quarto sistema si ricava $y=x+13$. Sostituendo nella seconda otteniamo l'equazione di secondo grado $x^2+169+26x+x^2+13x+x^2=7$
Cioè $3x^2+39x+169=7$
$3x^2+39x+169=7 \Rightarrow 3x^2+39x+162=0 \Rightarrow \Delta=-423 \Rightarrow$ NO soluzioni REALI

Le uniche coppie di interi (x,y) che soddisfano l'equazione $y^3-x^3=91$ sono
(5,6) (-6,-5) (-3,4) (-4,3)

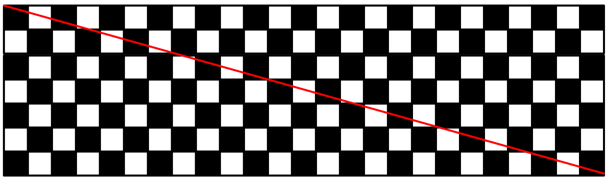
[*Nota*: è evidente la simmetricità delle soluzioni, a parte il segno… Ciò deriva dal fatto che, se (x,y) è una soluzione, allora $y^3-x^3=91$, ossia $(-x)^3 - (-y)^3 = 91$, dunque anche (-y,-x) è soluzione…]

ESERCIZIO 3

Innanzitutto è da notare che, se indichiamo con *b* la base del sistema di numerazione usato a Matelandia, *b* è ovviamente >4 in quanto altrimenti non avrebbe senso il "numero" 14, o il 41 ecc.

Osservato ciò, abbiamo che il discriminante dell'equazione irrisolvibile nel campo dei reali dev'essere <0, dunque, trasformando sia 14 che 41 in numeri in base decimale, abbiamo che $(b+4)^2-4*1*(4b+1)<0$, ossia $b^2+8b+16-16b-4<0$, ossia $b^2-8b+12<0$ (ove < sta ad indicare un MINORE STRETTO!!!). Risolvendo la disequazione si ottiene come soluzione $2<b<6$, ma b è intero e >4, per quanto detto prima!. Ne consegue che l'unico valore accettabile per b è 5. L'equazione si trasforma in $x^2+9x+21=0$, il discriminante è 81-84<0 OK.
La seconda equazione, in decimale, diviene $x^2 - 19x + 88=0$. Le soluzioni sono $x=(19+3)/2=11$ e $x=(19-3)/2=8$. Naturalmente a Matelandia scriveranno tali soluzioni in base 5, ossia come 21 e 13.

ESERCIZIO 4



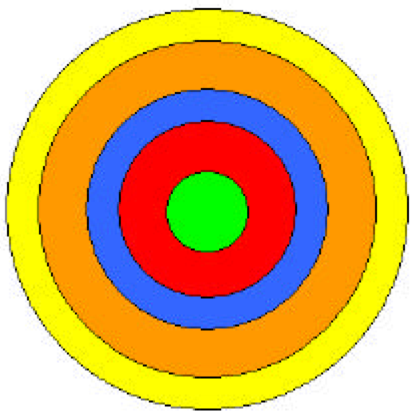
Dividiamo la scacchiera enorme in parti da 25*7 (vedi figura). I risultati che otterremo dall'analisi di questa porzione andranno successivamente moltiplicati per 5, in quanto la diagonale attraversa 5 rettangoli del genere…
Poiché 25/7=3.57 circa, il "cambio di riga" avviene in corrispondenza di tali distanze (in orizzontale, calcolate prendendo come unità di misura il quadretto)

3.57	7.14	10.71	14.28	17.85	21.42	25

1° riga	4 quadretti	2 NERI e 2 BIANCHI
2° riga	5 quadretti	3 NERI e 2 BIANCHI
3° riga	4 quadretti	2 NERI e 2 BIANCHI
4° riga	5 quadretti	2 NERI e 3 BIANCHI
5° riga	4 quadretti	2 NERI e 2 BIANCHI
6° riga	5 quadretti	3 NERI e 2 BIANCHI
7° riga	4 quadretti	2 NERI e 2 BIANCHI
totale		16 NERI e 15 BIANCHI

Moltiplicando per 5, si ha che la diagonale passa per 80 caselle nere e 75 bianche.

ESERCIZIO 5



[Chiedo perdono per il disegno, non è proprio in scala…]
Calcoliamo l'area delle parti colorate:
AREA verde: $r^2*\pi$
AREA rossa: $4r^2*\pi-r^2*\pi = 3r^2*\pi$
AREA blu: $9r^2*\pi-4r^2*\pi = 5r^2*\pi$
AREA arancio: $16r^2*\pi-9r^2*\pi = 7r^2*\pi$
AREA gialla: $25r^2*\pi-16r^2*\pi = 9r^2*\pi$

C’è una probabilità di
1/25 di beccare l’area VERDE.
3/25 di beccare l’area ROSSA.
5/25 di beccare l’area BLU.
7/25 di beccare l’area ARANCIO.
9/25 di beccare l’area GIALLA.

Ora, ci sono varie possibilità per le due frecce tirate:

prob(‘VERDE e VERDE’)=1/25*1/25=1/625	PUNTEGGIO: 10
prob(‘VERDE e ROSSA’)=1/25*3/25=3/625	PUNTEGGIO: 9
prob(‘VERDE e BLU’)=1/25*5/25=5/625	PUNTEGGIO: 8
prob(‘VERDE e ARANCIO’)=1/25*7/25=7/625	PUNTEGGIO: 7
prob(‘VERDE e GIALLA’)=1/25*9/25=9/625	PUNTEGGIO: 6
prob(‘ROSSA e VERDE’)=3/25*1/25=3/625	PUNTEGGIO: 9
prob(‘ROSSA e ROSSA’)=3/25*3/25=9/625	PUNTEGGIO: 8
prob(‘ROSSA e BLU’)=3/25*5/25=15/625	PUNTEGGIO: 7
prob(‘ROSSA e ARANCIO’)=3/25*7/25=21/625	PUNTEGGIO: 6
prob(‘ROSSA e GIALLA’)=3/25*9/25=27/625	PUNTEGGIO: 5
prob(‘BLU e VERDE’)=5/25*1/25=5/625	PUNTEGGIO: 8
prob(‘BLU e ROSSA’)=5/25*3/25=15/625	PUNTEGGIO: 7
prob(‘BLU e BLU’)=5/25*5/25=25/625	PUNTEGGIO: 6
prob(‘BLU e ARANCIO’)=5/25*7/25=35/625	PUNTEGGIO: 5
prob(‘BLU e GIALLA’)=5/25*9/25=45/625	PUNTEGGIO: 4
prob(‘ARANCIO e VERDE’)=7/25*1/25=7/625	PUNTEGGIO: 7
prob(‘ARANCIO e ROSSA’)=7/25*3/25=21/625	PUNTEGGIO: 6
prob(‘ARANCIO e BLU’)=7/25*5/25=35/625	PUNTEGGIO: 5
prob(‘ARANCIO e ARANCIO’)=7/25*7/25=49/625	PUNTEGGIO: 4
prob(‘ARANCIO e GIALLA’)=7/25*9/25=63/625	PUNTEGGIO: 3
prob(‘GIALLA e VERDE’)=9/25*1/25=9/625	PUNTEGGIO: 6
prob(‘GIALLA e ROSSA’)=9/25*3/25=27/625	PUNTEGGIO: 5
prob(‘GIALLA e BLU’)=9/25*5/25=45/625	PUNTEGGIO: 4
prob(‘GIALLA e ARANCIO’)=9/25*7/25=63/625	PUNTEGGIO: 3
prob(‘GIALLA e GIALLA’)=9/25*9/25=81/625	PUNTEGGIO: 2

prob(‘PUNTEGGIO = 10’) = 1/625
prob(‘PUNTEGGIO = 9’) = 6/625
prob(‘PUNTEGGIO = 8’) = 19/625
prob(‘PUNTEGGIO = 7’) = 44/625
prob(‘PUNTEGGIO = 6’) = 85/625
prob(‘PUNTEGGIO = 5’) = 124/625
prob(‘PUNTEGGIO = 4’) = 139/625
prob(‘PUNTEGGIO = 3’) = 126/625
prob(‘PUNTEGGIO = 2’) = 81/625

Dunque il punteggio più probabilmente totalizzato è 4.

ESERCIZIO 6
Se fosse razionale, avremmo che $\sqrt{(4n-1)} = p/q$, con p,q *Naturali* e *coprimi*
Da ciò consegue $q*\sqrt{(4n-1)}=p$ e $q^2*(4n-1)=p^2$.
Ragionando in termini di modulo 4, si ha che $0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=0$, $3^2=1$.
Quindi, sempre mod 4, q^2 e p^2 possono essere o 0 o 1, Inoltre $(4n-1) = -1 \bmod 4$.
Dobbiamo ottenere qualcosa di VERO facendo

$$\left\langle\begin{matrix}1\\ \\ 0\end{matrix}\right. \qquad * (-1) = \qquad \left\langle\begin{matrix}1\\ \\ 0\end{matrix}\right.$$

Si vede facilmente che l'unica possibilità per ottenere qualcosa di vero è che sia p^2 che q^2 siano =0 mod 4. Ma se così fosse, p e q sarebbero entrambi PARI, il che contrasta col fatto che li abbiamo presi primi tra loro!!! Da questa contraddizione segue che il numero $\sqrt{(4n-1)}$ non è MAI razionale.

ESERCIZIO 7
Il numero n si può scrivere, per quanto asserito nelle ipotesi, come
$n = 2004k+59 = 2005j+59$ per qualche $k,j \in \mathbf{N}$
Dall'uguaglianza segue che $2004k=2005j$. Ora, come sappiamo, due numeri consecutivi e maggiori di uno sono tra loro sempre relativamente primi. Ne consegue che k è un multiplo di 2005 e j di 2004. Poniamo allora proprio k=2005 e j=2004. Otteniamo n=2004*2005+59=4018079. L'ultima cifra di n è 9.
[*Nota*: nessuno ci obbliga a prendere proprio 2005 e 2004 come numeri k e j, basta che k sia del tipo 2005*a e j del tipo 2004*a, ove a è un intero positivo: ne consegue che n è uguale a 2004*2005*a+59= 4018020*a+59. L'ultima cifra del risultato sarà comunque 9.]

ESERCIZIO 8
Devo provare in un qualche modo a scomporre n^4+4. Notiamo che
$(n^2+2)^2 = n^4+4+4n^2$. Dunque $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2$. Ma questa è una DIFFERENZA DI QUADRATI, ulteriormente scomponibile come $(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$. Affinché il numero n^4+4 sia primo, devo imporre che uno dei due termini sia =1. Ma n^2+2n+2 (ricordiamo che n è un numero Naturale, dunque maggiore o uguale a zero) non potrà mai essere =1, pertanto devo imporre che $n^2-2n+2=1$, ossia $n^2-2n+1=0$, cioè $(n-1)^2=0$. Ciò accade solo con n=1. Dunque n^4+4 è primo solo per n=1, nel qual caso dà 4+1=5, che è effettivamente primo.

ESERCIZIO 9
Il sistema per risolvere questo esercizio è semplice: contando le cuciture totali che formano gli esagoni (6*20=120) e le cuciture totali che formano i pentagoni (5*12=60), ogni cucitura viene ovviamente contata due volte. Pertanto le cuciture sono in totale (120+60)/2=90.

ESERCIZIO 10

[*Nota*: non sono riuscito a scrivere le POTENZE DI POTENZE in modo appropriato, quindi se in alcuni casi vedrai scritto qualcosa del tipo r2 o y4 ad *esponente*, ciò è da intendersi come r^2 e y^4.]

Esercizi di questo tipo si risolvono tutti allo stesso modo, ossia cercando di dimostrare che quella quantità è sempre =8 (o =8), e l'= vale solo in specifici casi…

Allora, a sinistra abbiamo una SOMMA di esponenziali, con base 2. Consideriamo allora la funzione $f(x)=2^x$. Questa, lo sappiamo, è una funzione CONVESSA (ha la "pancia" verso l'alto) e dunque vale la particolare DISUGUAGLIANZA DI CONVESSITA' che Baldo ci ha dato proprio come Definizione di Convessità:

$f(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ per $x,y \in R$, $\lambda \in [0,1]$

Se $\lambda=1/2$ abbiamo $f((x+y)/2) = [f(x)+f(y)]/2$.

Dunque, per la particolare f considerata si ha che

$2*2^{((x+y)/2)} = 2^x+2^y$, e l'= vale solo se x=y

Sostituendo al posto di x la quantità r^4+s^2 e al posto di y la quantità r^2+s^4, otteniamo

$2^{(r4+s2)} + 2^{(r2+s4)} = 2*2^{[(r4+s4+r2+s2)/2]}$.

Utilizziamo ora altre due funzioni g e h

$g(x)=x^2$ $h(x)=x^4$

Anche queste funzioni sono Convesse, quindi vale

$g((x+y)/2) = (g(x)+g(y))/2$ e $h((x+y)/2) = (h(x)+h(y))/2$

Ossia $((x+y)/2)^2 = (x^2+y^2)/2$ e $((x+y)/2)^4 = (x^4+y^4)/2$

[gli uguali valgono ancora solo se x=y]

Dunque, se poniamo x=r e y=s otteniamo

$2^{(r4+s2)}+2^{(r2+s4)} = 2*2^{((r4+s4)/2+(r2+s2)/2)} = 2*2^{[((r+s)/2)4+((r+s)/2)2]} = 2*2^{(1+1)} = 8$

Dunque

$2^{(r4+s2)}+2^{(r2+s4)} = 8$ ed è = 8 se e solo se r=s.

Ma se r=s e r+s=2, r=s=1.

Verifichiamo in un battibaleno che $2^{(1+1)}+2^{(1+1)}=8$. Questa è l'unica soluzione.

ESERCIZIO 11

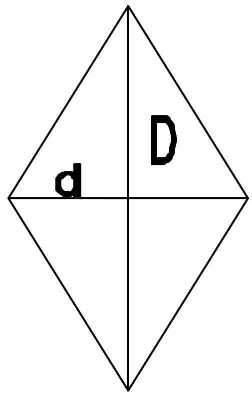
Riscriviamo l'operazione come $((a+1)/a)*((b+1)/b)$. Moltiplicando otteniamo $(ab+a+b+1)/(ab)$. Ma a+b=1, dunque $(ab+2)/ab = 1 + 2/ab$. Devo MINIMIZZARE questa quantità, ossia MASSIMIZZARE il prodotto ab sotto le condizioni poste. Per far ciò possiamo operare in vari modi:

1) a=1-b. Sostituendo nell'espressione che abbiamo da minimizzare otteniamo $1+2/(b(1-b)) = 1+2/(b-b^2) = (b^2-b-2) / (b^2-b)$. Calcolandone la DERIVATA e ponendola uguale a zero per trovare il punto di minimo si ottiene
   $(2b-1)*(b^2-b)-(2b-1)*(b^2-b-2)=0$, ossia, semplificando, 4b-2=0, cioè b=1/2. Dunque a=1-b=1/2 anche lei.
2) È risaputo che tra tutti i rettangoli di lati a e b la cui somma (il semiperimetro) è assegnata, quello di area massima è proprio quello in cui a=b, ossia un quadrato. Dunque per massimizzare a*b (l'area del rettangolo) pongo a=b, ma a+b=1, dunque a e b valgono identicamente ½.

Abbiamo in entrambi i casi che ab=1/4, dunque il valore MINIMO del prodotto è 1+2/(1/4)=1+8=9.

ESERCIZIO 12

Qui ci vuole un bel disegno:



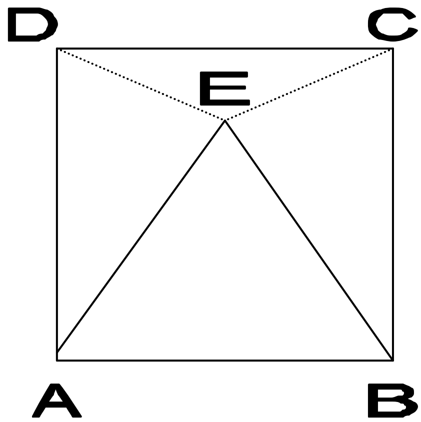
denominando le due diagonali, maggiore e minore, rispettivamente con D e d, otteniamo D=2d e Area=80=D*d/2=2d*d/2=d^2

Dunque d=√80 e D=2*√80 =√320.

Il lato del rombo si ottiene applicando il Teorema di Pitagora Sulle semidiagonali, che misurano dunque √20 e √80.

Lato = √(20+80) = √100 = 10 cm

ESERCIZIO 13



(forse il disegno non sarà proprio precisissimo, ma è solo indicativo…)

EAB = 60°

EAD= 90°-60° = 30°

AB=AE (perché il triangolo è equilatero)

AB=AD (perché è un quadrato)

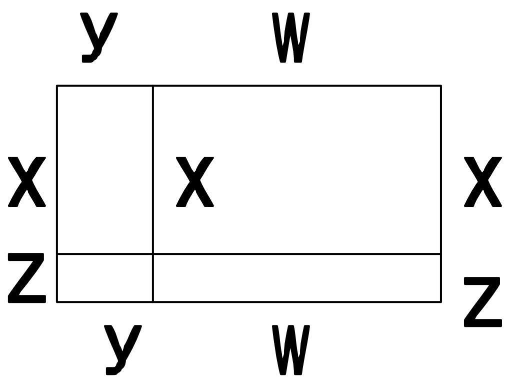
AE=AD (per la transitività dell'uguaglianza)

Dunque il triangolo ADE è Isoscele. Cioè gli angoli ADE e AED sono congruenti. ADE=AED=(180°-30°)/2 = 75°

EDC=ECD (per simmetria) = 90°-75°=15°

Infine DEC = 180°-15°-15°=150°

ESERCIZIO 14



Per quanto indicato nel disegno del testo,abbiamo che x+y=1, y+z=0.5, z+w=1. Dunque y=1-x, 1-x+z=0.5 (da cui z=x-0.5), e x-0.5+w=1, cioè x+w=1.5.

Ne consegue che il perimetro del rettangolo in alto a destra è 2x+2w=3.

ALTRA POSSIBILE SOLUZIONE (tutto sommato equivalente alla precedente):

Notiamo che il Perimetro dell'intero rettangolo è 2(x+y+z+w), ma noi sappiamo che x+y=1 e z+w=1, dunque tale perimetro è 4. Dovendo tale perimetro rimanere quello, se y+z=0.5 otteniamo 4=2(x+w+0.5), da cui con semplici calcoli x+w=1.5 e dunque il perimetro del rettangolo in alto a destra è 3.

ESERCIZIO 15

Ragioniamo su ciò che dice D: se D avesse un cappellino rosso, allora direbbe la verità, dunque ci sarebbero in totale TUTTI cappellini rossi. Ciò contraddirebbe il fatto che, ad esempio, B dice di vedere tutti cappellini bianchi, mentre per ipotesi, avendo egli un cappellino rosso, dovrebbe dire la verità…

Dunque D ha un cappellino BIANCO.

Ragioniamo ora su quel che dice B: se B avesse un cappellino rosso, allora direbbe la verità, dunque ci sarebbero TUTTI cappellini bianchi ad eccezione del suo: tutti gli altri direbbero dunque bugie… Ma C dice di vedere un cappellino rosso e tre bianchi, dunque direbbe la verità!!! Ma non doveva essere bugiardo??? Cadiamo anche qui in una contraddizione, dunque

B ha un cappellino BIANCO.

A dice ora di vedere un solo cappellino bianco tra gli altri quattro: ma abbiamo appena accertato che di cappellini bianchi ce ne sono almeno due: dunque A mente.

A ha dunque un cappellino BIANCO.

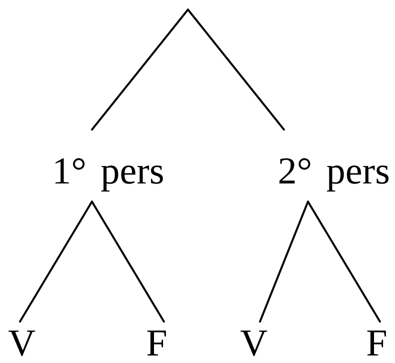
Ora, B mentiva, ricordate??? Dunque tra A,C,D ed E c'è almeno un cappellino rosso. Supponiamo che sia C ad averlo: ne consegue che C dice la verità, e dunque, vedendo egli tre cappellini bianchi (quelli di A,B e D) ci rivela che anche E ha un cappellino ROSSO.

Se invece supponiamo che sia E ad avere il cappellino rosso, ne deriva che C dice la verità e dunque possiede un cappellino rosso anche lui…

Ricapitolando, abbiamo che
A ha un cappellino BIANCO
B ha un cappellino BIANCO
C ha un cappellino ROSSO
D ha un cappellino BIANCO
E ha un cappellino ROSSO.

ESERCIZIO 16

È un problema di Probabilità Condizionata:
p('La prima persona dice la verità')= ¾
p('La prima persona mente')=1/4
p('La seconda persona dice il vero')=4/5
p('La seconda persona mente')=1/5



La probabilità che si verifichi l'evento 'Entrambe le persone hanno affermato la stessa cosa' è ¾ *4/5 + ¼*1/5 = 13/20.
Questo si è effettivamente verificato, dunque si "trasforma" in 100%.
La probabilità che entrambe le frasi siano vere è ¾*4/5=3/5.
Dunque per trovare la Prob condizionata risolviamo la proporzione
13/20 : 100% = 3/5 : x da cui x=92.3% circa, ossia 12/13

[*Nota*: questo metodo alquanto bizzarro per il calcolo della Probabilità Condizionata me lo sono inventato io al Liceo, perché altrimenti non capivo niente… La formula che i matematici utilizzano (mi pare si chiami di Bayes) è
prob('Frase vera se affermano la stessa cosa') =
prob('Prima frase vera')*prob ('Seconda frase vera') / prob ('Dicono la stessa cosa') =3/4*4/5 / 13/20 = 12/13]

ESERCIZIO 17

È assolutamente ovvio che, se Andrea e Bruno hanno una somma delle cifre uguale e dopo un anno non più, uno dei due ha un'età che termina con la cifra 9. L'anno prossimo Bruno avrà un'età la cui somma è quadrupla rispetto a quella delle cifre di Andrea: è dunque Andrea che è passato alla "decina successiva", facendo in modo che il suo 9 si trasformasse in 0… Dunque, chiamiamo s la somma delle cifre ATTUALI di Andrea (e dunque anche di Bruno). Passato un anno, Bruno ha una somma pari a s+1, mentre Andrea ha aumentato la cifra delle decine di 1, ma ha diminuito di 9 quella delle unità: in totale, ha "perso" ben 8 punti!!! Da ciò che afferma Bruno, abbiamo che s+1 = 4*(s-8) da cui ricaviamo 3s=33, cioè s=11. L'età di Andrea è dunque 29 anni. L'età di Bruno, dopo 2 anni torna ad eguagliare nella somma delle cifre quella di Andrea, dunque anche Bruno ha effettuato il "salto" di decina… dunque la sua età attuale termina per 8: essendo la somma 11, l'età di Bruno è 38 anni. Verifichiamo:

	ANDREA	BRUNO
ETA' ATTUALI	29 (somma=11)	38 (somma=11)
ETA' FRA UN ANNO	30 (somma=3)	39 (somma=12)
ETA' FRA DUE ANNI	31 (somma=4)	40 (somma=4)

ESERCIZIO 18

Notiamo subito un fatto elementare: L'ULTIMA CIFRA DI UN QUADRATO DIPENDE SOLO DALL'ULTIMA CIFRA DEL NUMERO INIZIALE…
Ossia 3, 13, 23, 43, 10453 terminano tutti con la cifra '9'. Infatti possiamo scrivere un numero separando la cifra delle unità dal resto, ossia come a*10+b, ove b è l'ultima cifra, e a è un numero (anche formato da più cifre…). Elevando al quadrato otteniamo $(a*10+b)^2 = a^2*100 + 20*ab + b^2$. I primi due termini non influiscono sull'ultima cifra (poiché terminano con zero…) e dunque l'ultima cifra è completamente determinata da b^2.
Notiamo poi che $1^2+2^2+3^2+ \dots + 10^2 = 385$ (cioè termina per 5)
Dunque anche $11^2+12^2+13^2+ \dots +20^2$ termina per 5.
La somma totale di tali 20 termini della successione termina dunque per 0. Per quanto detto prima, ogni 20 termini la somma parziale termina per 0.
Dunque $1^2+2^2+3^2+ \dots +196880^2$ termina per 0.
196881^2 termina per 1.
196882^2 termina per 4.
196883^2 termina per 9.
La somma totale termina con la cifra 4 (9+1+4=14).

ESERCIZIO 19

Se tale numero fosse primo, avrebbe esattamente DUE divisori.

Se fosse composto da due fattori distinti, ossia $n=a*b$, ove $a,b \in N$, allora avrebbe QUATTRO divisori: 1,a,b e n.

L'unica possibilità è dunque che n sia un QUADRATO (es: 49 ha esattamente TRE divisori: 1,7 e 49). Tale quadrato dev'essere però > 1 (in quanto 0 ha infiniti divisori, mentre 1 ha un solo divisore…) e dev'essere inoltre il quadrato di un numero PRIMO, in quanto ad esempio 16, scrivibile come 8*2, NON ha solo tre divisori, pur essendo un quadrato, ma ne ha 5 (1, 2, 4, 8, 16), mentre nell'esempio iniziale, 49 ha solo tre divisori poiché la sua radice, 7, è un numero primo.

I quadrati di numeri primi compresi tra 0 e 1000, esclusi lo 0 e l'1, sono :
4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961.

ESERCIZIO 20

Notiamo innanzitutto che nell'anno x generico la festa che si svolgerà sarà la (x-1978)-esima.

Facciamo subito un'altra osservazione importante: noi vogliamo che (x-1978) divida x. Certamente dunque (x-1978) sarà minore o uguale alla metà di x, ossia
$(x-1978) = x/2$. dunque $2x-3956 = x$, ossia $x = 3956$.

Se l'anno è birresco (indichiamo tale anno con x), abbiamo che esiste un $y \in N$ tale che $(x-1978)*y=x$, ossia $xy-x=1978y$, cioè $x(y-1)=1978y$

Ora, $1978=2*23*43$, e dunque $x(y-1)=2*23*43*y$.

Sappiamo che (y-1) e y sono tra loro relativamente primi: ne consegue che (y-1) dev'essere un DIVISORE di 1978. x sarà uguale a 1978y/(y-1)

Abbiamo vari casi:

(y-1)=1	y=2	x=1978y/(y-1)=3956
(y-1)=2	y=3	x=1978y/(y-1)=2967
(y-1)=23	y=24	x=1978y/(y-1)=2064
(y-1)=43	y=44	x=1978y/(y-1)=2024
(y-1)=2*23=46	y=47	x=1978y/(y-1)=2021
(y-1)=2*43=86	y=87	x=1978y/(y-1)=2001
(y-1)=23*43=989	y=990	x=1978y/(y-1)=1980
(y-1)=2*23*43=1978	y=1979	x=1978y/(y-1)=1979

Questi sono tutti e soli gli anni birreschi... Ci toccherà aspettare altri 18 anni per il prossimo, ma nulla ci vieta di fare una "Festa della birra", qui, nella nostra Italia, anche prima!!!

ESERCIZIO 21

Siano x,y,z,w i 4 numeri.

Voglio che $(10x+y)*(10z+w) = (10y+x)*(10w+z)$

Ossia $100xz+\cancel{10xw}+\cancel{10zy}+yw = 100yw+\cancel{10yz}+\cancel{10wx}+xz$

Cioè $100xz+yw = 100yw+xz$

Ossia $99xz = 99yw \Rightarrow x*z=y*w$

Ricordando che le 4 cifre sono DISTINTE, abbiamo che una cosa del genere può accadere solo con

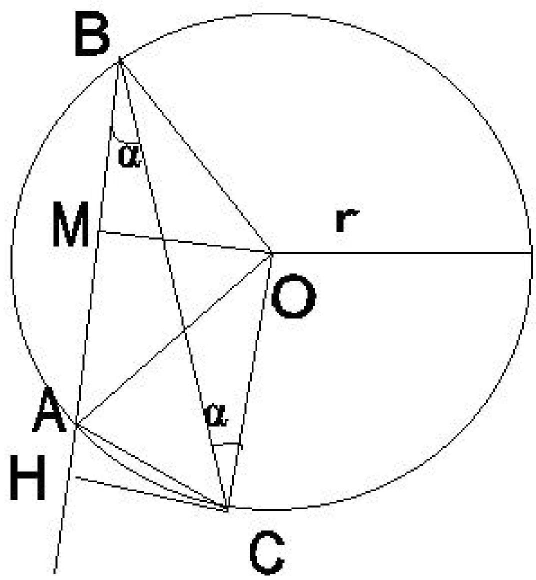
1*6=2*3
1*8=2*4
2*6=3*4
2*9=3*6
3*8=4*6

I rispettivi insiemi di 4 elementi sono {1,2,3,6}, {1,2,4,8}, {2,3,4,6}, {2,3,6,9}, {3,4,6,8}.

ESERCIZIO 22

Affermazione a: ERRATA. Basta osservare questo semplice controesempio:
$a_0 = 5$; $d = 25$;
i termini della successione sono 5,30,55,80,105,130,… 5 divide un termine (anzi, veramente li divide tutti!!!) ma non esistono termini divisibili per 25.
Affermazione b: CORRETTA. Sia a_n il termine divisibile per 7 e sia d la ragione della progressione. Abbiamo che $a_{n+7} = a_n+7d$. Poiché a_n è divisibile per 7 e 7d, ovviamente, è anch'esso divisibile per 7, anche a_{n+7} è divisibile per 7. Tutti i numeri divisibili per 7 saranno della forma a_{n+7k}, con $k \in Z$.

ESERCIZIO 23



DATI:
CAB – ABC = 90°
AM = MB
CHB = 90°

Chiamiamo α l'angolo ABC. Ne consegue che CAB = 90°+ α e, poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre 180°, ACB = 90°-2α.
Uniamo ora i tre vertici del triangolo col Centro della circonferenza circoscritta, O, ottenendo dei triangoli isosceli. Per le note proprietà sugli angoli alla base di tali triangoli isosceli, abbiamo che OCB = OBC, OAB = OBA = α + OBC = α + OCB, e infine OCA = OAC. Ma OAC = CAB – OAB = 90° + α - (α + OCB) = 90° - OCB.
Dunque OCA = 90° - OCB. Ma OCA = OCB+BCA= OCB + 90°-2α.
Pertanto, riunendo le due condizioni ultime, OCB-2α= -OCB, cioè OCB=α.
Le rette individuate dai segmenti OC e BH sono dunque PARALLELE, in quanto formano angoli alterni interni uguali rispetto alla stessa trasversale BC. Ora, tracciamo la PERPENDICOLARE al segmento AB passante per M. Essa è l'ASSE di tale segmento, e pertanto passa per O (il CIRCOCENTRO è infatti il punto di

intersezione degli assi dei tre lati del triangolo). Ora, CHM = 90° perché CH è un'altezza, HMO = 90° per costruzione (è un asse), OCH = 90° poiché HC è TANGENTE alla circonferenza in C. Ne consegue che anche COM è retto, e cioè il quadrilatero COMH è un rettangolo. Ma allora HM=OC perché lati opposti del rettangolo… essendo OC un raggio, la Tesi è Dimostrata.

ESERCIZIO 24

Non riuscendo a trovare alcuna formula soddisfacente per risolvere il problema in tutto **R** (anche perché l'esponenziale reale è un po' difficile da definire, no?), né in **Q**, mi ritiro negli Interi
(forse questo mi toglierà dei punti in questo esercizio, ma non mi importa…)

Dunque, ragioniamo in **Z**. Sia x una SOLUZIONE NEGATIVA (del tipo –k):
otteniamo

- se k è dispari
  $1/(-k)^k - 1/2^k - k^2 = 10$
  il primo termine è sempre compreso tra 0 e –1, il secondo tra 0 e –1 (naturalmente sto tenendo conto dei rispettivi segni di ciascun addendo…) e il terzo è negativo $\Rightarrow$ tale somma non farà MAI 10.
- se k è pari
  $1/(-k)^k - 1/2^k - k^2 = 10$
  il primo termine è sempre compreso tra 0 e 1 (il segno diventa positivo perché –k elevato a potenza pari cambia di segno…), il secondo è compreso tra 0 e –1 (sempre tenendo conto dei rispettivi segni di ciascun addendo…) e il terzo è negativo $\Rightarrow$ tale somma non farà MAI 10.

Dunque siamo giunti alla conclusione che x è POSITIVO o NULLO.
Anzi, non può essere neppure zero, poiché 0^0 non è definito…
Ragioniamo dunque sui NATURALI STRETTAMENTE POSITIVI.
Se x=1 $1^1-2^1-1^2 = -2 \neq 10$
Se x=2 $2^2-2^2-2^2 = -4 \neq 10$
Se x=3 $3^3-2^3-3^2 = 10 = 10$
Abbiamo trovato una soluzione. Ce ne saranno altre?
Beh, notiamo che se x=4 $4^4-2^4-4^2 = 224 > 10$

Ora, per terminare l'esercizio devo dimostrare due cose:

1) Vale la disuguaglianza $x^2>(2x+1)$, per x = 5.
   Spostando l'1 a primo membro, si ottiene $x^2 - 1 > 2x$, ossia
   $(x+1)(x-1) > 2x$. Questo è ovviamente vero poiché $(x+1) > x$ e $(x-1)>2$ (ricordiamo che x = 5!!!)

2) Per x = 5, vale anche che
   $2^x > x^2$
   Dimostriamo questa affermazione per INDUZIONE:

BASE) $2^5 > 5^2$ ok

PASSO) Supponiamo vera tale disugualianza per k ($k = 5$) e verifichiamo se è vera anche per il successivo:

$2^{(k+1)} = 2^k*2 > 2*k^2 = (k^2+k^2) > (k^2+2k+1)$ per quanto dimostrato al punto precedente.

Dunque $2^{(k+1)} > (k+1)^2$

Dunque possiamo, per $x = 5$, scrivere

$x^x - 2^x - x^2 > x^x - 2^x - 2^x = x^x - 2^{(x+1)}$

Ma, se $x = 5$ $x^x = 5^x > 4^x = 2^{2x} > 2^{2x} - 2^{(x+1)} = 2^{(x+1)}*[2^{(x-1)} -1]$

Dunque $x^x > 2^{(x+1)}*[2^{(x-1)} - 1]$

Perciò $x^x - 2^{(x+1)} > 2^{(x+1)}* [2^{(x-1)}-1-1]$

Ora, $2^{(x+1)}$ è $= 2^6$, e $[2^{(x-1)}-1-1]$ è certamente positivo, anzi, è anche sempre >10!!! Dunque, se $x = 5$, la quantità iniziale è PIU' grande di 10 $\Rightarrow$ Per $x = 5$ non vi sono soluzioni. L'unica soluzione è dunque x=3.

ESERCIZIO 25

È molto difficile dimostrare che un numero è primo, è molto più semplice dimostrare che non lo è (e già qui si può immaginare che tale numero NON sarà primo…).

Effettivamente si può dimostrare che il numero non è primo considerando le CONGRUENZE mod 13.

Per il Piccolo Teorema di Fermat, abbiamo che $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ se MCD(a,13)=1.

Dunque $2^{30} = 2^{12}*2^{12}*2^6 \equiv 1*1*2^6 \equiv 64 \equiv -1 \pmod{13}$

Analogamente $5^{20} = 5^{12}*5^8 \equiv 1*5^8 \pmod{13}$

Notando ora che $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$ abbiamo che

$5^{20} \equiv 5^8 = (5^2)^4 \equiv (-1)^4 =1 \pmod{13}$

In conclusione, $2^{30}+5^{20} \equiv -1+1 \equiv 0 \pmod{13}$

Dunque tale somma è DIVISIBILE per 13: il numero non è primo.

Grazie al **Trentista Eugenio**, queste soluzioni sono le sue!
(io non avevo, e non ho tuttora, voglia di scriverle)